Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung

---

Verkürzte Fassung

der

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Abteilung

der Philosophischen Fakultät

der Universität Basel

vorgelegt von

Stefan Warschawski

aus Königsberg i. Pr.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin. 1932

Genehmigt von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Abteilung der Philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. A. Ostrowski (Basel), Dr. L. Lichtenstein (Leipzig) und Dr. O. Spiess (Basel).

Basel, den 1. Juli 1930.

Professor Dr. H. Zörnig,
Dekan.

Herrn Stefan Warschawski wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Abteilung der Philosophischen Fakultät der Universität Basel am 30. Juni 1931 erlaubt, diese verkürzte Fassung seiner am 1. Juli 1930 genehmigten Inauguraldissertation drucken zu lassen. Die vollinhaltliche Arbeit kann eingesehen oder entliehen werden:

1. im Mathematischen Seminar der Universität Basel;
2. in der Universitätsbibliothek Basel;
3. in der Schweizerischen Landesbibliothek in Bern.

Die vollinhaltliche Arbeit erscheint in der Mathematischen Zeitschrift, Band 35, 1932.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck
aus „Mathematische Zeitschrift", Band 35, Heft 3/4

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 322

I. Kapitel. Anwendungen des Löwnerschen Satzes, Herleitung der Hauptungleichungen 338

§ 1. Der Löwnersche Satz 338

§ 2. Weitere Hilfssätze 349

§ 3. Die Unbewalltheitsfunktion, die Richtungsfunktion und der metrische Parameter 355

§ 4. Formulierung und Beweis der Hauptungleichungen 361

§ 5. Folgerungen aus den Sätzen 1 und 2 376

§ 6. Heranziehung der Vergleichskurven 381

Zusammenfassung 386

Einleitung.

Im folgenden bezeichne G ein von einer geschlossenen Jordankurve begrenztes Gebiet in der w-Ebene, $z = \varphi(w)$ eine Funktion, die G auf das Innere des Einheitskreises umkehrbar eindeutig und konform abbildet. Bekanntlich hat H. A. Schwarz bewiesen, daß, wenn C eine analytische Kurve ist, $\varphi(w)$ auch noch auf der Randkurve C selber analytisch ist. Insbesondere ist dann also auch $\varphi(w)$ in $G + C$ stetig und besitzt dort Ableitungen von beliebig hoher Ordnung. Painlevé[1]) hat nun (1891) zum ersten Male die Frage aufgeworfen, unter welchen allgemeineren Annahmen über die Randkurve C von G die Funktion $\varphi(w)$ in $G + C$ stetig ist, und wann sie darüber hinaus dort Ableitungen — bis zu einer bestimmten Ordnung $p \geqq 1$ — besitzt. Die Stetigkeit von $\varphi(w)$ in $G + C$ bewies er unter der Annahme, daß C stückweise stetige Tangente hat; sein auf die Existenz der Ableitungen bezügliches Resultat lautet folgendermaßen: *Ist C durchweg durch die Gleichung*

$$w = w(s) = x(s) + i\,y(s) \tag{1}$$

gegeben, wo s die längs C gezählte Bogenlänge ist, existieren ferner die Ableitungen $x^{(n+2)}(s)$, $y^{(n+2)}(s)$ und sind diese durchweg auf C stetig, so existiert durchweg in $G + C$ $\varphi^{(n)}(w)$ und ist dort stetig[2]).

Später (1909) hat Herr Lichtenstein[3]) über die erste Ableitung $\varphi'(w)$ von $\varphi(w)$ ein wesentlich schärferes Resultat hergeleitet: er zeigte, daß *bereits unter der Annahme, daß die Randkurve C von G stetig gekrümmt ist, $\varphi'(w)$ in $G + C$ existiert und stetig ist und daß darüber hinaus $\varphi'(w)$, das ja wegen der Schlichtheit der Abbildung $z = \varphi(w)$ in G nicht verschwindet, auch in $G + C$ nirgends gleich Null ist.* Insbesondere folgt hieraus, daß es zwei positive Zahlen μ_1 und μ_2 gibt, so daß für alle w in $G + C$

$$0 < \mu_1 \leqq |\varphi'(w)| \leqq \mu_2$$

gilt. Ist $w = f(z)$ die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion, die also den Einheitskreis auf G abbildet, so folgt hieraus offenbar die Existenz und Stetig-

---

[1]) P. Painlevé, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris **112** (1891), p. 653—657. Dort wird auch auf seine Thèse hingewiesen.

[2]) Sind die Annahmen dieser Sätze nur längs eines Bogens erfüllt, so gelten die in ihnen ausgesprochenen Behauptungen gleichfalls auf diesem Bogen. Wir haben die obige Formulierung nur der Kürze halber gewählt. Analoges gilt von den weiter unten genannten Sätzen von Lichtenstein, Kellogg und Lawrentieff.

[3]) L. Lichtenstein, Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen des elliptischen Typus, Math. Annalen **67** (1909), S. 559—575, s. insbesondere S. 561 bis 563. Dort wird dieser Satz als Hilfssatz für die weiteren Untersuchungen hergeleitet.

keit von $f'(z)$ in der abgeschlossenen Kreisscheibe $|z| \leqq 1$. Vorher hatte Herr Korn[4]) dieses Ergebnis unter Hinzunahme weiterer Voraussetzungen über C hergeleitet.

Einige Jahre darauf (1912) hat O. D. Kellogg[5]) die Frage nach der Existenz und Stetigkeit der Ableitungen von $\varphi(w)$ wieder aufgenommen und ist so zu noch weitergehenden Resultaten gelangt. Diese Frage, die ja, potentialtheoretisch formuliert, auf die Frage nach dem Verhalten der Ableitungen der Greenschen Funktion von G auf dem Rande hinausläuft, wird bei Kellogg im Rahmen einer allgemeineren Untersuchung über das Verhalten der Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie und zwar über das Verhalten ihrer Ableitung auf dem Rande des Definitionsgebietes behandelt. Die in dieser Arbeit eingeschlagene Methode ist rein potentialtheoretisch und benutzt die Theorie der Integralgleichungen. Er bewies den folgenden Satz (der übrigens auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete gilt; wir formulieren ihn nur für unser einfach zusammenhängendes Gebiet G): *Die Randkurve C von G möge durchweg eine sich stetig drehende Tangente besitzen und unter Zugrundelegung der Bogenlänge als Parameter durch die Gleichung* (1) *dargestellt sein. Ferner möge $w(s)$ n-mal stetig differenzierbar sein und $w^{(n)}(s)$ möge darüber hinaus gleichmäßig auf C einer Lipschitzbedingung mit dem Exponenten α, $0<\alpha<1$, genügen*

$$|w^{(n)}(s_1) - w^{(n)}(s_2)| \leqq K|s_1 - s_2|^{\alpha} \qquad (K \text{ Konstante}).$$

Dann existieren durchweg in $G+C$ die Ableitungen $\varphi^{(\nu)}(w)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sind dort stetig, und es gilt darüber hinaus in $G+C$

$$|\varphi^{(n)}(w_1) - \varphi^{(n)}(w_2)| \leqq K'|w_1 - w_2|^{\alpha} \quad (K' \text{ Konstante}).$$

Hieraus folgt insbesondere für $n = 1$ die Existenz und Stetigkeit von $\varphi'(w)$ in $G + C$. Darüber hinaus bewies Kellogg, daß $\varphi'(w)$ *nirgends in $G+C$ verschwindet.* Ferner zeigte Kellogg durch Angabe eines Beispiels, daß die Existenz einer endlichen oder von 0 verschiedenen ersten Ableitung noch keineswegs aus der Annahme der bloßen Stetigkeit der Tangente in der Umgebung des betrachteten Randpunktes allein folgt. (Er betrachtet die durch $z \lg z$ in der Umgebung des Nullpunktes vermittelte Abbildung geeigneter Gebiete.)

---

[4]) A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie Bd. 2 (1901), S. 348–354. Herr Korn hat sich vor allem auch mit analogen Fragen im Raume beschäftigt (vgl. den Enzyklopädieartikel von Herrn Lichtenstein).

[5]) O. D. Kellogg, Harmonic functions and Greens integral, Transactions of the Americ. Math. Society **13** (1912), pp. 109—132. Siehe auch L. Lichtenstein, Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. II, III, Neuere Entwickelung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.

Während in den bisher genannten Untersuchungen nach dem Verhalten der Ableitung von $\varphi(w)$ auf einem Bogen der Kurve C gefragt wird, längs dessen durchweg gewisse Regularitätseigenschaften der Kurve angenommen werden, kommt in der Literatur auch die Frage vor, wie sich die Ableitung von $\varphi(w)$ in einzelnen Punkten verhält, die gerade gegenüber ihrer Umgebung „singuläre" Punkte sind. So hat Herr Lichtenstein[6]) (ein Jahr vor dem Erscheinen der Kelloggschen Arbeit) die Frage nach dem Verhalten der Ableitung in einer Ecke aufgeworfen, die von zwei in einem Punkte $w = w_1$ von C zusammenstoßenden bis auf die Endpunkte analytischen Kurvenzweigen von C gebildet wird. Im Punkte w_1 erleidet die von 0 verschiedene Krümmung einen Sprung. Er bewies, daß, wenn *die Ecke die Öffnung* $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, *hat, in der Umgebung von* w_1 *für* w *in* $G + C$

$$\varphi'(w) = (w - w_1)^{\frac{1}{\tau} - 1} \varphi_0(w)$$

ist, wo $\varphi_0(w)$ *eine stetige Funktion und* $\varphi_0(w_1) \neq 0$ *ist.* Analoge Sätze hat er auch für höhere Ableitungen hergeleitet. Aus diesem Resultat folgt leicht, daß der Grenzwert

$$\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}},$$

der für eine Ecke einen Ersatz für die Ableitung bildet, existiert. Zwei Jahre später haben Osgood und Taylor[7]) das obige Resultat von Herrn Lichtenstein auf anderem Wege bewiesen, und zwar mit einer Methode, die sich ohne weiteres auf Ecken anwenden läßt, die von zwei stetig gekrümmten Kurvenästen gebildet sind.

In neuerer Zeit (1927) hat Herr Lawrientieff[8]) eine C. R.-Note veröffentlicht, in der er (ohne Beweis) unter anderm auch einige Resultate über das Randverhalten des Differenzenquotienten $\left|\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1}\right|$ mitteilt. Wir erwähnen vor allem den Satz, daß dieser Differenzenquotient zwischen zwei positiven Schranken bleibt, wenn C durchweg stetige Krümmung besitzt. Dieser Satz geht zwar weniger weit, als der entsprechende Satz von Kellogg; Herr Lawrientieff führt aber seinen Beweis, wie er angibt, auf rein funktionentheoretischem Wege, und zwar benutzt er einen Hilfssatz, den auch wir im folgenden verwenden werden (den Satz von Löwner § 1,

---

[6]) L. Lichtenstein, Über die konforme Abbildung ebener, analytischer Gebiete mit Ecken, Journal für Mathematik **140** (1911), S. 100—119. Siehe auch den in Fußnote [5]) zitierten Encyklopädieartikel von Herrn Lichtenstein.

[7]) W. F. Osgood und E. H. Taylor, Transactions of the Americ. Math. Society **14** (1913), pp. 277—298, s. insbesondere S. 282—283.

[8]) Lawrentieff, Sur la représentation conforme, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris **184** (1927), p. 1407.

Satz A). Der Beweis von Herrn Lawrientieff hat vermutlich mit unserem Ansatz einige Berührungspunkte gemeinsam. — Ein weiteres Resultat, das sich auf Kurven mit stetiger Tangente bezieht, besprechen wir weiter unten (Kap. I, § 6, Satz 6).

Auf eine weitere Fragestellung, die mit den oben geschilderten Fragen zusammenhängt und in neueren Arbeiten der Herren J. Wolff, C. Carathéodory, E. Landau und G. Valiron behandelt worden ist, gehen wir weiter unten ein.

Die vorliegenden Untersuchungen sind nun aus den Versuchen hervorgegangen, den Kelloggschen Satz und vor allem den auf die erste Ableitung bezüglichen Teil dieses Satzes auf rein funktionentheoretischem Wege zu beweisen. Diese Versuche lassen sich an eine allgemeinere Fragestellung anknüpfen, die wir in folgendem behandeln und so formulieren wollen: *Die Randkurve C möge in einem Punkte P $(w = w_1)$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, besitzen. Bekanntlich ist $\varphi(w)$ in $G + C$ stetig. Wie verhält sich dann der „Differenzenquotient"*

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}, \tag{2}$$

wenn $w \to w_1$ $(w \neq w_1)$ in $G + C$ konvergiert? (Für $\tau = 1$ ist (2) der gewöhnliche Differenzenquotient von $\varphi(w)$ in $w = w_1$.) Insbesondere handelt es sich dann darum, möglichst einfache geometrische Bedingungen über die Natur der Randkurve C in der Umgebung von w_1 dafür anzugeben, daß (2) zwischen zwei positiven Schranken bleibt — wir sagen dann, C besitzt in P eine *„konforme Ecke"* [9]) — und daß ferner der $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ existiert. — Nachdem wir so Kriterien für die Existenz der Ableitung gefunden haben, fragen wir weiter, wann diese längs eines Bogens von C stetig ist. In dieser Abhandlung beschäftigen wir uns nur mit der Untersuchung der auf die erste Ableitung bezüglichen Fragen. Das Verhalten der höheren Ableitungen soll einer zweiten, dieser folgenden Mitteilung vorbehalten werden.

Es sei hier noch gleich auf eine etwas andere Auffassung dieser Fragestellung hingewiesen. Ist $w = f(z)$ die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion, so liefert $f(e^{i\vartheta})$, $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$, eine Parameterdarstellung der Kurve C vermittels des Parameters ϑ, die in gewisser Beziehung als eine *„natürliche" Parameterdarstellung* der Kurve C angesehen werden kann, da sie ja immer

[9]) Der Begriff der konformen Ecke sowie der weiter unten zu besprechende Begriff der generalisierten konformen Ecke wurde von Herrn Ostrowski in seiner Arbeit: Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen, Acta Math. **53** (1929), S. 234 bzw. S. 244, 245 eingeführt.

vorhanden ist und bekanntlich gewisse ausgezeichnete Eigenschaften besitzt. Die obige Frage nach der Beschränktheit des Differenzenquotienten (2) nach oben und unten bzw. nach der Existenz des $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ läuft im wesentlichen, wenn $f(1) = w_1$ angenommen wird, auf die Frage nach der Beschränktheit des Differenzenquotienten $\frac{|f(e^{i\vartheta}) - f(1)|}{|\vartheta|^\tau}$ nach oben und unten bzw. auf die Existenz des $\lim_{\vartheta \to 0} \frac{f(e^{i\vartheta}) - f(1)}{\vartheta^\tau}$ hinaus. Es sei nun $w(t)$, $-T \leqq t < T$, eine andere Parameterdarstellung unserer Kurve C, $w(0) = w_1$. Man kann dann insbesondere fragen, ob aus der Beschränktheit von $\left|\frac{w(t) - w(0)}{t^\tau}\right|$ nach oben und unten bzw. der Existenz eines endlichen und von 0 verschiedenen $\lim_{t \to 0} \frac{|w(t) - w(0)|}{|t|^\tau}$ auch die entsprechenden Tatsachen für $\frac{f(e^{i\vartheta}) - f(1)}{\vartheta^\tau}$ folgen, d. h. ob der durch die konforme Abbildung gelieferte Parameter *ebenso „leistungsfähig" wie ein anderer Parameter ist.* Wie das eben genannte Kelloggsche Beispiel zeigt, ist dies — bei dieser Formulierung der Frage — *nicht* der Fall. Wir werden jedoch sehen, daß dies in einem gewissen Umfange doch zutrifft, wenn die Frage etwas anders gestellt wird. —

Es hat sich nun als zweckmäßig erwiesen, die Frage nach dem Verhalten des Differenzenquotienten (2) noch weiter zu gliedern, und zwar den *„allseitig" genommenen* Differenzenquotienten von dem *„im Winkelraum" gebildeten* Differenzenquotienten (2) zu unterscheiden. Wir sprechen dabei im folgenden von dem Verhalten einer in G definierten Funktion $\psi(w)$ bei *allseitiger* Annäherung von w an den Randpunkt w_1 von G — und also auch von dem des allseitig genommenen Differenzenquotienten $\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} = \psi(w)$ —, wenn $w(\neq w_1)$ in beliebiger Weise in dem Definitionsbereich von $\psi(w)$ gegen w_1 konvergiert. Insbesondere soll ausdrücklich die Annäherung von w an w_1 längs C dabei zugelassen sein, wenn $\psi(w)$ — wie z. B. der Differenzenquotient — auf C (mit eventueller Ausnahme von w_1) definiert ist. Wir sprechen ferner von dem Verhalten der Funktion $\psi(w)$ bei Annäherung von w an w_1 *„im Winkelraum"*, wenn $w \to w_1$ innerhalb eines jeden Winkelraumes konvergiert, der von zwei von w_1 ausgehenden mit je einem an w_1 anstoßenden Stück ganz in G verlaufenden Strahlen gebildet ist.

Die Frage nach der Existenz der im Winkelraum gebildeten Ableitung ist in den oben genannten Arbeiten von Herrn Carathéodory und Herrn Valiron behandelt worden. Allerdings braucht bei diesen Untersuchungen G nicht als ein von einer Jordankurve begrenztes Gebiet vorausgesetzt zu werden, sondern kann ein wesentlich allgemeineres einfach zusammenhängendes Ge-

biet sein. Diese Untersuchungen stützen sich auf den folgenden Satz[10]: a) Ist $f(z)$ in $|z|<1$ regulär und absolut <1, so existiert stets der

$$\lim_{z\to 1}\frac{1-f(z)}{1-z}=\alpha,$$

wenn $z\to 1$ „im Winkelraum" konvergiert, und α ist entweder endlich und dann positiv oder ∞. Im ersten Falle konvergiert auch $f'(z)\to\alpha$, wenn $z\to 1$ „im Winkelraum" strebt. Mit Hilfe dieses Satzes beweist Herr Carathéodory vor allem: b) *G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, P $(w=w_1)$ ein Randpunkt von G, $w=f(z)$ bilde $|z|<1$ auf G ab. Gibt es dann einen Kreis K_1, der den Punkt P mit dem Rande von G gemeinsam hat und dessen Inneres ganz G angehört, und ferner einen Kreis K_2, der gleichfalls den Punkt P mit dem Rande von G gemeinsam hat und sonst ganz außerhalb von G verläuft, so gibt es einen Punkt z_1 auf $|z|=1$, so daß $\lim_{z\to z_1} f(z)=w_1$ ist, wenn $z\to z_1$ im Winkelraum gegen w_1 konvergiert, und $f(z)$ in z_1 eine im Winkelraum gebildete Ableitung besitzt.* Ferner konvergiert $f'(z)\to f'(z_1)$, wenn $z\to z_1$ „im Winkelraum" strebt. In einer etwas später erschienenen Arbeit leitet Herr Valiron[11]) einen allgemeineren Satz über die Existenz der endlichen Winkelderivierten her, bei dem an die Stelle des von „innen berührenden" Kreises K_1 des Carathéodoryschen Satzes Kurven allgemeineren Charakters treten, die im „Berührungspunkte" P keine endliche Krümmung mehr besitzen.

In der vorliegenden Abhandlung beschäftigen wir uns, wie gesagt, mit der Frage nach dem Verhalten des Differenzenquotienten (2) bei *allseitiger Annäherung von w an w_1* und beschränken uns daher nur auf Punkte,

---

[10]) In dieser Form wurde dieser Satz zum ersten Male explizite formuliert und bewiesen von Herrn Carathéodory in seiner Arbeit: Über Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1929, S. 39—54 und unabhängig und nahezu gleichzeitig von den Herren Landau und Valiron mit einem überraschend einfachen Beweis in der gemeinsam veröffentlichten Note: A deduction from Schwarz's lemma, Journal of the London Math. Society **4**, March 1929, pp. 162—163. Wie ich durch eine freundliche Mitteilung von Herrn Prof. Landau erfuhr, findet sich dieser Satz implizite in einer bereits 1926 erschienenen C. R.-Note (**183**, S. 500—502) von Herrn J. Wolff, in der Herr Wolff einen etwas anderen Satz herleitet, nämlich: Aus $f(z)$ regulär und absolut <1 für $|z|<1$ und $f(z)-z\neq 0$ in $|z|<1$, folgt die Existenz eines einzigen Randpunktes $z=\alpha$, in dem $\frac{\alpha-f(z)}{\alpha-z}$ und $f'(z)$ für $z\to\alpha$ „im Winkelraum" gegen einen und denselben endlichen und positiven Grenzwert konvergieren. Doch enthält Nr. 1 bis 5 seiner Note, in denen er noch nicht von der speziellen Annahme $f(z)-z\neq 0$ in $|z|<1$ Gebrauch macht, genau den Beweis des obigen Satzes.

[11]) G. Valiron, Sur un théorème de Julia, étendant le lemme de Schwarz, Bullet. des Sciences mathem. 1929.

die *auf freien Jordanbögen* des Randes liegen. Wir dürfen dann weiter annehmen (vgl. Hilfssatz 4 in Nr. 6), daß der Rand von G eine geschlossene Jordankurve ist. Nur in einem Anhang zu dieser Arbeit geben wir kurz eine Verallgemeinerung der eben erwähnten Resultate über die Winkelderivierte der Herren Carathéodory und Valiron an in einem Umfange, wie sie die einfache Anwendung der über die allseitig gebildete Ableitung hergeleiteten Ergebnisse zu formulieren gestattet. —

Bei unserer Untersuchung gehen wir folgendermaßen vor: Unter einer geeigneten Annahme über die Struktur der Randkurve in der Umgebung von P läßt sich das Verhalten des längs C gebildeten Differenzenquotienten (2) durch das Verhalten geeigneter in jedem festen Winkelraum gebildeter Differenzenquotienten (2) charakterisieren. Um diese Bedingung zu formulieren, führen wir eine neue Begriffsbildung ein, nämlich die sog. *Unbewalltheitsfunktion* $\Delta(\varepsilon)$ der Kurve C im Punkte P. Darunter verstehen wir folgendes: Es sei c ein beliebiger Teilbogen von C, der P als inneren Punkt enthält. Wir beschreiben dann um P den Kreis k_ε mit so kleinem Radius ε, daß k_ε nur den Bogen c trifft, nicht aber den übrigen Teil der Kurve C, P_1 und P_2 seien die beiden „letzten" Schnittpunkte von k_ε mit c, die man bei der Durchlaufung von c von P aus nach beiden Seiten antrifft. $\Delta(\varepsilon)$ ist dann der Radius der kleinsten abgeschlossenen Kreisscheibe, die beide Bögen $\overset{\frown}{PP_1}$ und $\overset{\frown}{PP_2}$ von c enthält. Die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ braucht nur für *hinreichend kleine* Werte von ε definiert zu sein und ist im folgenden Sinne unabhängig vom Bogen c: ersetzt man c durch einen größeren c umfassenden oder einen kleineren in c enthaltenen Bogen (der gleichfalls P als inneren Punkt enthält), so hat $\Delta(\varepsilon)$ für hinreichend kleines ε immer denselben Wert, unabhängig davon, welcher Bogen zur Definition zugrunde gelegt wird. Die oben genannte Bedingung besteht nun darin, daß wir verlangen, der Quotient $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$, der ja seiner Definition nach $\geqq 1$ ist, soll nach oben beschränkt sein oder, wie wir sagen wollen, C soll in P *„linear unbewallt"* sein. Die dieser Bedingung zugrunde gelegte anschauliche Vorstellung ist die, daß die Kurve C in der Umgebung des Punktes P keine allzu starken „Schwankungen" macht. Es stellt sich nämlich heraus, daß notwendig dafür, daß der Differenzenquotient (2) zwischen zwei positiven Schranken bleibt bzw. einem Grenzwert zustrebt, ist, daß $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ bzw. $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ [12]) gilt. Da es uns nun vor allem auf die Frage nach der Beschränktheit bzw. der Konvergenz des Differenzenquotienten (2) ankommt, *setzen wir nun von vornherein das Bestehen der Relation*

[12]) Wir benutzen das von Herrn Ostrowski eingeführte Symbol $\uparrow$ bzw. $\downarrow$, um das monotone Zunehmen bzw. Abnehmen zum Ausdruck zu bringen.

$\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ *voraus.* Unter dieser Annahme leiten wir nun den folgenden Satz her, der das für uns wichtigste Hilfsmittel zur Untersuchung der allseitig genommenen Ableitung darstellt (Satz 1 und 2):

Die Hauptungleichungen. *W bezeichne einen von zwei von w_1 ausgehenden Strahlen gebildeten Winkelraum der Öffnung $2\psi_1 < \tau$, der in der Umgebung von w_1 ganz in G liegt. Dann gibt es zwei Konstanten M und M', sowie zu jedem hinreichend nahe bei w_1 gelegenen w auf C zwei Zahlen R, R', die mit $w \to w_1$ gegen 0 konvergieren, so daß für alle Punkte c, c' in W im Abstande R bzw. R' von w_1*

$$M \frac{|\varphi(c) - \varphi(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}} \leqq \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \leqq M' \frac{|\varphi(c') - \varphi(w_1)|}{|c' - w_1|^{1/\tau}}$$

gilt. Die Konstanten M, M' hängen wesentlich von τ, $\varkappa = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ und ψ ab. Sie können von w abhängig gemacht werden und konvergieren dann mit $w \to w_1$ gegen $\frac{1}{\varkappa^{\frac{1}{\tau}}} \cos^2\left(\frac{\psi}{\tau}\right)$ bzw. $\varkappa^{\frac{1}{\tau}} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\psi}{\tau}\right)}$.

Der etwas komplizierte Beweis dieses Satzes, dem der § 4 dieser Arbeit gewidmet ist, beruht auf einer konsequenten mehrmaligen Anwendung des bereits oben erwähnten Löwnerschen Satzes (Satz A, § 1), und erfordert eine Reihe von Hilfssätzen, die wir zu einem Teil im § 1 (Hilfssätze 1 bis 3) und zum andern Teil im § 2 (Hilfssätze 6 bis 9) herleiten. Diese Hilfssätze sind, wie wir glauben, auch unabhängig von diesem Zusammenhange von Interesse; sie liefern genauere Abschätzungen für die Bildlänge eines Randbogens bei konformer Abbildung unter verschiedenen Annahmen über die Normierung der Abbildungsfunktion.

Aus diesem Satze leitet man ohne Schwierigkeit den folgenden Satz (Satz 3) ab: *Existiert der Grenzwert von* (2), *wenn $w \to w_1$ längs einer in w_1 mündenden Kurve L in G strebt, die C nicht berührt, so ist notwendig und hinreichend, damit* (2) *bei allseitiger Annäherung von w an w_1 einen Grenzwert besitzt, daß $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ konvergiert (d. h. C in P, wie wir sagen werden, „regulär unbewallt" ist).*

Es genügt somit, das Verhalten des Differenzenquotienten (2) längs einer beliebigen in w_1 mündenden und die Kurve in C nicht berührenden Kurve L zu kennen, um — unter den Annahmen $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ bzw. $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ — auf das Verhalten des allseitig genommenen Differenzenquotienten (2) Rückschlüsse ziehen zu können.

Um nun das Verhalten des Differenzenquotienten (2) bei der Annäherung längs solcher Kurven L zu untersuchen, führen wir die sogenannten *Vergleichskurven* ein. Wir verstehen unter einer *inneren* resp.

äußeren Vergleichskurve $\mathfrak{C}_i$ bzw. $\mathfrak{C}_a$ von C in P eine geschlossene Jordankurve, die den Punkt P mit C gemeinsam hat und sonst nirgends außerhalb bzw. nirgends innerhalb von C verläuft und im letzten Falle das Innere von C enthält. Die in der oben genannten Abhandlung von Herrn Carathéodory benutzten Kreise und die allgemeineren Kurven von Herrn Valiron können als solche Vergleichskurven aufgefaßt werden.

Es seien G und G_1 allgemein zwei von den geschlossenen Jordankurven C und C_1 begrenzte Gebiete, von denen das eine bis auf den gemeinsamen Randpunkt P im Innern des andern enthalten ist und die beide in P eine Ecke (nicht notwendig von derselben Öffnung) besitzen. Bildet man G und G_1 beide Male auf das Innere des Einheitskreises ab und bildet mit jeder Abbildungsfunktion den in einem festen Winkelraum genommenen Differenzenquotienten (2), so besteht zwischen den absoluten Beträgen dieser Ausdrücke eine gewisse eigentümliche Monotonierelation, wie man sie ähnlich vom Schwarzschen Lemma und seiner Verallgemeinerung, dem Lindelöfschen Prinzip, her kennt. Man kann sie etwas unpräzise dahin formulieren, daß der Differenzenquotient für das größere Gebiet im wesentlichen größer ist. (Die Ungleichung gilt also in der entgegengesetzten Richtung wie beim Lindelöfschen Prinzip; Näheres siehe § 6.) Somit ist es also klar, daß wir Schranken für den allseitig gebildeten Differenzenquotienten (2) finden können, wenn wir geeignete Vergleichskurven konstruieren. Auf die Beschränktheit des Differenzenquotienten nach oben und unten kommt es zunächst vor allem an. Unter den im folgenden zu machenden Annahmen werden wir dann die Existenz des $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ verhältnismäßig leicht nachweisen können.

Die Bedingung, die wir zur Kennzeichnung des Verhaltens des Differenzenquotienten (2) benutzen, besteht also, wie wir zusammenfassend sagen können, aus zwei „Komponenten", die nach zwei wesentlich verschiedenen Richtungen dem Verhalten der Kurve in der Nachbarschaft von P Rechnung tragen: 1. aus der Bedingung über die Unbewalltheitsfunktion, welche die innere Struktur von C in der Umgebung von P charakterisiert und 2. aus der Annahme der Existenz geeigneter Vergleichskurven, eine Bedingung, die sich mehr auf den „äußeren" Verlauf von C in der Umgebung von P bezieht. Nach dem Obigen erscheint es wohl auch verständlich, daß es für Untersuchungen über die Winkelderivierten nur auf die zweite Bedingung ankommt (vgl. die oben genannten Sätze der Herren Carathéodory und Valiron).

Die Konstruktion von Vergleichskurven führen wir nun am Anfang des zweiten Kapitels durch, wo wir den Hauptsatz über die konformen Ecken herleiten. Eine genauere Analyse der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ zeigt, daß diese Bedingung damit äquivalent ist, daß gewisse ausgezeichnete

Parameterdarstellungen der Kurve C: $w = w(t)$, $-T \leqq t < T$ existieren, und zwar folgender Art: Entspricht dem Scheitelpunkt P der Ecke der Parameterwert $t = 0$, so gibt es zwei positive Konstanten c_1 und C_1, so daß für alle t im betrachteten Intervall

$$0 < c_1 \leqq \left| \frac{w(t) - w(0)}{t} \right| \leqq C_1 \tag{3}$$

gilt. Wir bezeichnen dann t als einen *„metrischen Parameter"*. Zwischen dem $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \varkappa$ und dem Quotienten $\frac{L}{l}$ der Größen $L = \overline{\lim\limits_{t \to 0}} \left| \frac{w(t) - w(0)}{t} \right|$, $l = \lim\limits_{t \to 0} \left| \frac{w(t) - w(0)}{t} \right|$ besteht ein enger Zusammenhang. Des weiteren ist die Bedingung $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ damit äquivalent, daß es einen metrischen Parameter t gibt, für den über (3) hinaus auch noch der $\lim\limits_{t \to 0} \frac{w(t) - w(0)}{t}$ existiert und positiv ist.

Wir nehmen nun an, die Kurve C sei in einer solchen Parameterdarstellung durch einen metrischen Parameter gegeben; γ_-, γ_+ seien die beiden in P zusammenstoßenden Kurvenäste von C, welche die Ecke der Öffnung $\pi\tau$ in P bilden, t_-, t_+ die Halbtangenten an γ_- bzw. γ_+ in P; $\xi(t)$ bezeichne den Abstand des Punktes $w(t)$ auf γ_- bzw. γ_+ von der entsprechenden Halbtangente. Es sei $\Xi(t)$ eine *„monotone Majorante"* von $\xi(t)$, d. h. eine monotone mit $|t| \downarrow 0$ selber monoton gegen 0 abnehmende Funktion, für die $\xi(t) \leqq \Xi(t)$ ist. Z. B. kann $\Xi(t) = \xi^*(t)$ gesetzt werden, wo

$$\xi^*(t) = \begin{cases} \operatorname{Max}\limits_{0 < \sigma \leqq t} \xi(\sigma), & t > 0, \\ \operatorname{Max}\limits_{0 > \sigma \geqq t} \xi(\sigma), & t < 0, \end{cases}$$

ist; $\xi^*(t)$ ist die *„kleinste"* derartige monotone Majorante.

Wir erläutern nun kurz die Konstruktion der Vergleichskurven für den Fall der Ecke der Öffnung π ($\tau = 1$), da wir alles auf diesen Fall vermittelst der Transformation $u = (w - w_1)^{1/\tau}$ reduzieren können und es somit nur auf diesen Fall ankommt.

Wir setzen voraus, daß das Integral $\int_0^{\omega} \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt$, $\omega < 0$, konvergiert. Unter diesen Annahmen können wir zwei im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre Funktionen $w = F(z)$, $w = F_1(z)$ konstruieren, die $|z| < 1$ auf das Innere von geschlossenen Jordankurven abbilden, von denen die eine innere, die andere äußere Vergleichskurve von C in P ($w = w_1$) ist. Ferner besitzen $F(z)$, $F_1(z)$ im Punkte $z = 1$, den sie in $w = w_1$ überführen, im Winkelraum gebildete Ableitungen. So gewinnen wir zunächst Schranken für den im Winkelraum gebildeten und hieraus dann nach den Haupt-

ungleichungen auch für den allseitig genommenen Differenzenquotienten (2). Für diese Konstruktion der Vergleichskurven brauchen wir einen Hilfssatz (Hilfssatz 12, § 8), der zu jeder mit $|t| \downarrow 0$ monoton gegen 0 abnehmenden Funktion $X(t)$ eine andere monotone (und übrigens stetig differenzierbare) Funktion $V(t)$ von ähnlichem Charakter zuordnet, die *schwächer* als $X(t)$ gegen 0 konvergiert, darüber hinaus aber gewisse weitere Eigenschaften besitzt (es konvergiert ein gewisses im folgenden benutztes Integral, das Integral (8, 2)). Dieser Satz hängt mit dem bekannten Reihensatze zusammen, daß es zu jeder Reihe mit positiven Gliedern eine schwächer konvergierende Reihe mit positiven Gliedern gibt; die hier verwendeten Überlegungen liegen aber wesentlich tiefer.

Nachdem das Vorhandensein einer konformen Ecke in P bewiesen ist, folgt — im wesentlichen unter Zuhilfenahme eines potentialtheoretischen Hilfssatzes (Hilfssatz 14), den wir zu diesem Zwecke herleiten — leicht auch die Existenz des $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ zunächst bei Annäherung von w an w_1 längs einer speziellen Kurve und dann unter Hinzunahme der Bedingung $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ auch bei allseitiger Annäherung. - Übrigens gestattet die Beweismethode dieses Hilfssatzes einen neuen Beweis des oben zitierten Satzes a) über die Existenz des $\lim_{z \to 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z}$ bei einer im Einheitskreise regulären und beschränkten Funktion $f(z)$ für $|z| < 1$ im Winkelraum. —

So erhalten wir das folgende Resultat (Satz 7):

Hauptsatz über konforme Ecken: *Hat die geschlossene Jordankurve C in P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$ $(0 < \tau \leqq 2)$, ist ferner C in P linear unbewallt (d. i. $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$) und ist schließlich das mit der oben definierten Funktion $\xi^*(t)$ gebildete Integral $\int_0^\omega \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt$, $\omega \gtrless 0$, konvergent, so hat C in P eine konforme Ecke.*

Ist darüber hinaus C in P regulär unbewallt $\left(d.\ i.\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1\right)$, so existiert sogar für die Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ des Inneren von C auf das Innere des Einheitskreises der $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ bei allseitiger Annäherung und ist von 0 und ∞ verschieden.

Diesem Satz können wir eine Ergänzung beifügen, die zeigt, daß die Bedingung dieses Satzes, was die Größenordnung von $\xi(t)$ betrifft, nicht verbessert werden kann. Wir beweisen nämlich (Satz 8), daß, *wenn die Kurve C in der Umgebung des Punktes P ganz innerhalb eines der beiden von den Halbtangenten t_- und t_+ in P gebildeten Winkelräume verläuft und wenn ferner $\xi(t)$ monoton, also $\xi^*(t) = \xi(t)$ ist, notwendig aus der Voraussetzung der konformen Ecke die Existenz eines metrischen Para-*

meters σ *und die Konvergenz des Integrals* $\int_0^{\omega} \frac{\xi_1^*(\sigma)}{\sigma^2} ds$ *folgt.* ($\xi_1^*(\sigma)$ ist die Funktion $\xi^*(t)$ als Funktion von σ aufgefaßt.)

Von dem Standpunkt der oben erwähnten Frage nach der „*Güte*" des durch die konforme Abbildung gelieferten Parameters, können wir das im Hauptsatze gewonnene Resultat auch folgendermaßen formulieren: Ist t ein metrischer Parameter in $w = w_1$, für den das Integral $\int_0^{\omega} \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt$ existiert, so ist auch $\sigma = |\vartheta|^{\tau} \operatorname{sgn} \vartheta$ ein metrischer Parameter von C in $w = w_1$, für den gleichfalls das Integral $\int_0^{\omega'} \frac{\xi_1^*(\sigma)}{\sigma^2} d\sigma$, $\omega' \gtrless 0$ ($\xi_1^*(\sigma) = \xi^*(t)$ gesetzt) konvergiert. In diesem Sinne kann man also behaupten, daß der konforme Parameter mit der „*beste*" ist. Vgl. auch Satz 12.

Wenn auch der Beweis des Satzes 7 etwas kompliziert erscheint, so liegt dies zum Teil daran, daß wir im Hinblick auf die weiteren Anwendungen dieses Satzes die *Art der Abhängigkeit der für den Differenzenquotienten* (2) *hergeleiteten Schranken von der Kurve C* ermitteln wollen. Dies zwang uns, beim Beweise in weit höherem Maße, als es sonst nötig gewesen wäre, auf quantitative Überlegungen einzugehen. Ferner haben wir auch an geeigneten Stellen des Beweises in Fußnoten Bemerkungen angefügt, deren Zweck es ist, diese Abhängigkeit herauszuarbeiten. Das Ergebnis haben wir dann im Zusatze zu Satz 7 zusammengefaßt. Die Schranken hängen natürlich einmal von den die Kurve C in der Umgebung von P charakterisierenden Größen, weiter von der Normierung der Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ (d. h. davon, welcher Punkt bei der Abbildung in den Nullpunkt übergeführt wird) und schließlich auch von der Gesamtausdehnung der Kurve C ab. —

Der übrige Teil des zweiten Kapitels (§§ 10, 11) bringt Anwendungen des Satzes 7. Das wichtigste Ergebnis des § 10 ist der Satz 10. Dort wird unter der Annahme, daß *die Kurve C längs eines Bogens c stetig sich drehende Tangente besitzt, und daß ferner, falls der Bogen c unter Zugrundelegung der Bogenlänge s als Parameter durch die Gleichung* $w = w(s)$, $0 \leqq s \leqq a$, *dargestellt wird, das Integral* $\int_0^{\delta} \frac{w'(s+\sigma) - w'(s)}{\sigma} d\sigma$ *in jedem Intervall der Form* $0 < \alpha \leqq s \leqq \beta < a$ *gleichmäßig konvergiert, bewiesen, daß* $\varphi'(w)$ *auf dem (offenen) Bogen c existiert, stetig und von* 0 *verschieden ist.* Zum Beweise dieses Satzes zeigen wir zuerst, daß $\varphi'(w)$ auf c existiert und zwischen zwei positiven Schranken liegt, und leiten erst dann die Stetigkeit von $\varphi'(w)$ her. Für spätere Anwendungen, bei

denen der Satz nicht nur auf eine einzige feste Kurve, sondern auf eine *Schar* von Kurven C mit gemeinsamen für diese Schar charakteristischen Eigenschaften angewandt werden soll, haben wir den Beweis des Satzes von vornherein so angelegt, daß wir diese Schranken in ihrer Abhängigkeit von diesen Eigenschaften der Kurve C bestimmen. Dies macht natürlich den Beweis etwas umständlicher, als er es sonst wäre. Ferner haben wir an geeigneten Stellen des Beweises in Fußnoten Bemerkungen hinzugefügt, die diese Abhängigkeit herausarbeiten sollen und das Ergebnis im Zusatz 1 zum Satz 10 formuliert. Ein weiterer Zusatz (über die „Stetigkeitsfunktion" von $f'(z) - f(z)$ ist die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion — s. Nr. 98) soll gleichfalls bei späteren Überlegungen verwertet werden. Da die erwähnten Anwendungen des Satzes 10 erst in der zweiten Mitteilung angegeben werden sollen, können alle diese auf die „Gleichmäßigkeit" bezüglichen Bemerkungen auch zunächst überschlagen werden.

Im § 11 untersuchen wir Kurven C mit einer Ecke in einem ihrer Punkte P, die von zwei in P zusammenstoßenden Kurvenzweigen mit stetiger Tangente gebildet ist. Wir charakterisieren die Änderung des Tangentenwinkels in der Umgebung des Punktes P durch die Angabe einer *allgemeinen Lipschitzbedingung*: bildet die (etwa im Sinne wachsender s gerichtete) Tangente im Punkt $P(s)$ mit der positiven reellen Achse den Winkel $\theta(s)$, wobei s die von P aus gezählte Bogenlänge bedeutet $(-\delta \leqq s \leqq \delta)$ und haben die Halbtangenten in P die Richtungswinkel θ_- und θ_+, so möge

$$(4) \qquad |\theta(s) - \theta_+| \leqq \omega(s), \quad \underset{s<0}{|\theta(s) - \theta_-|} \leqq \omega(|s|)$$

sein, wo $\omega(\sigma)$ eine für $\sigma \downarrow 0$ monoton nach 0 abnehmende stetige Funktion von σ ist, $0 < \sigma \leqq \delta$. Wir bezeichnen $\omega(\sigma)$ als den *„Lipschitzschen Modul"* von $\theta(s)$ in $s = 0$. Wir fassen alle geschlossenen Jordankurven, deren Tangentenwinkel $\theta(s)$ als Funktion der Bogenlänge s in einer von zwei Kurvenästen mit stetiger Tangente gebildeten Ecke $P(s = 0)$ der Lipschitzschen Bedingung (4) genügen, zu einer Klasse $L(\omega(\sigma))$ zusammen. Dann gilt der Satz (Satz 11): *Hinreichend und notwendig dafür, daß alle Kurven der Klasse $L(\omega(\sigma))$ in dem betrachteten Punkte P eine konforme Ecke besitzen, ist, daß das Integral* $\int_0^\delta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma$ *konvergiert.*

Hat C längs eines Bogens c durchweg sich stetig drehende Tangente und gibt es einen Lipschitzschen Modul $\omega(\sigma)$ mit konvergentem Integral $\int_0^\delta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma$, so daß durchweg auf diesem Bogen

$$|\theta(s) - \theta(s_1)| \leqq \omega(|s - s_1|)$$

gilt, so ist $\varphi'(w)$ längs dieses Bogens stetig und von 0 verschieden. Indem man $\omega(\sigma)$ spezialisiert, erhält man weitere spezielle Kriterien. So ergibt sich für $\omega(\sigma) = K\sigma^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, (K Konstante) der Teil des eingangs genannten Satzes von Kellogg (für $n = 1$), der die Stetigkeit von $\varphi'(w)$ und $\frac{1}{\varphi'(w)}$ behauptet. Aber auch das Bestehen der Lipschitzbedingung für $\varphi'(w)$ und $\frac{1}{\varphi'(w)}$ läßt sich dann — unter Zuhilfenahme eines Satzes von Herrn I. Privaloff über konjugierte Potentialfunktionen — leicht herleiten. —

Im einzelnen ist die Arbeit folgendermaßen angeordnet. Das erste Kapitel, in dem wir die Hauptungleichungen herleiten und aus ihnen verschiedene Folgerungen ziehen, umfaßt die Paragraphen 1 bis 6. In den Paragraphen 1 und 2 leiten wir im wesentlichen die Hilfssätze her, die wir zum Beweise der Hauptungleichungen im § 4 brauchen. Wir gehen im § 1 von dem Löwnerschen Satze aus (Nr. 1), besprechen einige Folgerungen und Anwendungen (Sätze A, B, C) und sodann drei Hilfssätze (die Hilfssätze 1 bis 3), die wir für den Beweis der Hauptungleichungen brauchen. Dagegen werden die dort weiter folgenden Hilfssätze 4 und 5 erst später (§ 9) benutzt. § 2 enthält die Hilfssätze 6 bis 9, die nur in § 4 gebraucht werden. Der § 3 ist vor allem der Diskussion der Unbewalltheitsfunktion gewidmet und bereitet im übrigen alle im folgenden zu benutzenden geometrischen Hilfsmittel vor. Die Begriffe der „Richtungsfunktion“ und des „metrischen Parameters“ werden erst im zweiten Kapitel gebraucht. § 4 enthält die Formulierung und den Beweis der Hauptungleichungen, § 5 weitere Anwendungen, deren wichtigste der oben genannte Satz 3 ist. Im § 6 führen wir die Vergleichskurven ein und leiten den Zusammenhang zwischen dem Differenzenquotienten (2) der Abbildungsfunktion von G und gewissen Differenzenquotienten der Abbildungsfunktion des Innern der Vergleichskurven auf den Einheitskreis ab. Daraus ziehen wir dann einige Folgerungen, unter denen wir den Satz 5 hervorheben möchten, der den Zusammenhang der „*generalisierten konformen*“ *Ecke* mit der „*konformen*“ *Ecke* klärt.

Das zweite Kapitel enthält den Hauptsatz über konforme Ecken und Anwendungen. Es umfaßt die Paragraphen 7 bis 11. Im § 7 wird der Hauptsatz formuliert und daran werden drei Vorbemerkungen angeschlossen. Im § 8 leiten wir drei Hilfssätze her, die zum Beweise des Hauptsatzes, der im § 9 durchgeführt wird, benötigt werden. Am Schlusse von § 9 leiten wir den Satz 8 (s. oben) her, der für eine spezielle Klasse von Kurven die Umkehrung des Satzes 7 darstellt. § 10 enthält Anwendungen des Satzes 7 auf rektifizierbare Kurven und § 11 auf Kurven mit stetiger Tangente, bei denen das Verhalten der Tangente durch eine allgemeine Lipschitz-Bedingung charakterisiert wird.

Schließlich gehen wir in einem Anhang kurz auf eine naheliegende Verallgemeinerung der Sätze der Herren Carathéodory und Valiron über

die Existenz einer endlichen und von 0 verschiedenen im Winkelraum genommenen Ableitung ein[13]).

[13]) Nachdem ich die Redaktion dieser Arbeit bereits abgeschlossen hatte, erschien die Abhandlung von Herrn L. Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta societatis scientiarum Fennicae, Nova series A, **1**, Nr. 9 (1930), S. 1—40, die in ihren Resultaten mit einem Teile dieser Arbeit enge Berührungspunkte aufweist. Herr Ahlfors befaßt sich dort mit der Frage nach der „im Winkelraum" gebildeten Ableitung in einem Randpunkte. Er geht von einem anderen Gesichtspunkt aus als wir, indem er zur Charakterisierung des Randes in der Umgebung des betrachteten Randpunktes eine etwas andere Bedingung als wir benutzt, und gelangt zu einem schärferen Resultat über die Existenz der Winkelableitung, als wir es unter Benutzung unserer Ergebnisse über die allseitige Ableitung im Anhang formulieren konnten. Man könnte aber auch sein Resultat beim Beweise unseres Satzes 7 verwenden. Dieser Beweis besteht, wie oben ausgeführt, darin, daß wir zunächst vermittels der „Hauptungleichungen" das Verhalten des allseitig gebildeten Differenzenquotienten in einem Randpunkte auf dasjenige des im Winkelraum gebildeten reduzieren und sodann die Beschränktheit dieses Differenzenquotienten beweisen. Dieser letzte Teil des Beweises — der im wesentlichen auf der Konstruktion der Vergleichskurven beruht — ließe sich nun auch durch das Ahlforssche Resultat über die Existenz der Winkelableitung ersetzen. Mit seinem schärfsten Ergebnis (Satz II, S. 36) könnte man unseren Satz 7 sogar etwas verschärfen. Im übrigen enthält aber seine Arbeit keines der in unserer Arbeit selbst formulierten Resultate, die sich ja alle auf die allseitige Ableitung beziehen. Seine Methode ist von der unseren wesentlich verschieden, wenn auch die Grundidee seines Beweises seines Satzes II (S. 36) auch in der Konstruktion eines geeigneten „Vergleichsgebietes" besteht.

Anmerkung bei der Korrektur. Während des Druckes der vorliegenden Abhandlung erschienen die folgenden Arbeiten, die mit dieser vielfach Berührungspunkte gemeinsam haben: 1. P. Bessonoff et M. Lawrientieff, Sur l'existance de la dérivée limite, Bull. de la soc. math. de France **58** (1930), p. 175—198. Dort wird vor allem ein Spezialfall unseres Satzes 7 bewiesen (nämlich $\xi^*(t) = c\,t^{1+\alpha}$, α, c positive Konstanten, $0 < \alpha < 1$). Der Beweis weist, sowohl was die Verwendung des Löwner-Montelschen Satzes als auch die Heranziehung von „Vergleichskurven" anbetrifft, sehr enge Berührungspunkte mit dem unsrigen auf, ist aber einfacher als dieser, da er für den Spezialfall direkt zugeschnitten ist. 2. J. Wolff, Comptes rendus **191** (1930_2), p. 921—923, wo die Ableitung der Abbildungsfunktion bei Kurven untersucht wird, die in dem betrachteten Punkt P eine Tangente t haben und in seiner Umgebung in Polarkoordinaten (r, φ) — φ Winkel des Radiusvektors r gegen t, P sein Scheitelpunkt — durch $r = r(\varphi)$ mit *monotonem* $r(\varphi)$ gegeben sind, die aber insbesondere dort ganz auf einer Seite von t verlaufen. Es wird 1. gezeigt, daß die Abbildungsfunktion in P stets eine *allseitige* Ableitung hat (∞ zugelassen), und 2. wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Endlichkeit der Ableitung angegeben, die mit der unseres Satzes 7 $\left(\text{Konvergenz von } \int_0^{\delta} \frac{\xi^*(t)}{t^2}\,dt\right)$ für diese speziellen Kurven äquivalent ist. 2. ist in unserem Sätzesystem 7, 8 enthalten, 1. kann mit der Beweismethode von Satz 8 unter Zuhilfenahme der Hauptungleichungen erhalten werden. Die Wolffschen Beweise sind besonders einfach. 3. W. Seidel, Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen, Math. Annalen **104** (1931), S. 183—243. Dort wird neben der Abbildung von speziellen

(Fortsetzung der Fußnote [13]) auf nächster Seite.)

Die Anregung zu dieser Arbeit sowie viele wertvolle Ratschläge sowohl bei der allmählichen Herausarbeitung der Fragestellungen als auch bei der Durchführung sowie bei ihrer endgültigen Darstellung verdanke ich Herrn Professor Ostrowski. So geht unter anderem insbesondere die Formulierung der im folgenden neu eingeführten geometrischen Begriffsbildungen (vgl. auch das Verzeichnis am Schlusse der Einleitung), so die des Kurvenelements, der Unbewalltheitsfunktion, des metrischen Parameters u. a. teils auf mündliche Besprechungen mit ihm und teils auf seine Vorlesungen zurück. Es sei mir gestattet, Herrn Professor Ostrowski für das stete freundliche Interesse, mit dem er den Fortgang meiner Arbeit sowie meiner bisherigen Studien überhaupt unterstützte und förderte, meinen herzlichsten und aufrichtigsten Dank auszusprechen. — Ferner danke ich der philosophischen Fakultät der Universität Basel für einen mir freundlichst gewährten Zuschuß zu den Veröffentlichungskosten der Arbeit.

Verzeichnis der im folgenden eingeführten Begriffsbildungen.

	Seite
Abschirmen	340
Konforme Ecke	384
Generalisierte konforme Ecke	384
Konforme Länge	339
Konformes Maß	339
Kurvenelement	355
Metrischer Parameter	357
Richtungsfunktion	357
Unbewalltheitsfunktion	355, 357
Unbewallt: linear unbewallt	357
regulär unbewallt	357
Vergleichskurve	381

Gebietsklassen auch das Randverhalten der Ableitungen der Abbildungsfunktion $w=f(z)$ von $|z|<1$ auf das Innere von geschlossenen Jordankurven C untersucht. Zu unserem Gegenstand stehen vor allem die Sätze 18 bis 20 in Beziehung, wo unter der Annahme, daß C durchweg „beschränkte Krümmung“ hat (der Tangentenwinkel $\theta(s)$ genügt einer Lipschitzbedingung), die Totalstetigkeit von $f'(z)$ und ferner die Existenz für fast alle ϑ von $\lim_{r\uparrow 1} f''(re^{i\vartheta})$ und die die Integrabilität von $|f''(e^{i\vartheta})|^p$ für jedes $p>0$ bewiesen wird. Vgl. hierzu unsere Sätze 10, 12. — Ferner möchten wir auf die kürzlich erschienenen Arbeiten von O. D. Kellogg, On the derivatives of harmonic functions on the boundary, Transactions of the American Math. Soc. **33** (1931), p. 486–510, J. Schauder, Potentialtheoretische Untersuchungen I, Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 602–640, und L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie IV, Sächsische Berichte 82 (1930), S. 265–344, hinweisen, wo sich weitere Untersuchungen über die Ableitungen von (räumlichen) Potentialfunktionen am Rande befinden.

I. Kapitel.

Anwendungen des Löwnerschen Satzes. Herleitung der Hauptungleichungen.

§ 1.

Der Löwnersche Satz.

1. Ein bekannter von Herrn Löwner[14]) herrührender Satz lautet:

Es sei $f(z)$ *in* $|z|<1$ *regulär und absolut* <1, *es sei ferner* $f(0)=0$. *Ferner besitze* $f(z)$ *auf einem Bogen* γ *von* $|z|=1$ *stetige Randwerte vom Betrage* 1. *Dann wird durch* $f(z)$ *dieser Bogen auf einen nicht kürzeren abgebildet. Die Länge von* γ *bleibt nur erhalten, wenn* $f(z)\equiv e^{i\tau}z$ (τ *reell*) *ist.*

Beweis. Durchläuft z den Bogen γ in mathematisch positivem Sinne, so durchlaufen sowohl $f(z)$ als auch $\frac{f(z)}{z}$ ihre Bildbögen in mathematisch positivem Sinne, da beide Funktionen in $|z|<1$ regulär und absolut <1 sind und auf γ stetige Randwerte vom Betrage 1 besitzen[15]). Ferner ist $\arc f(z)=\arc z+\arc\frac{f(z)}{z}$, und weil der Zuwachs von $\arc\frac{f(z)}{z}$ auf γ nicht negativ ist, ist der Zuwachs von $\arc f(z)$ auf γ nicht kleiner als die Länge

---

[14]) K. Löwner, Math. Annalen **89** (1923), S. 111f. Siehe auch L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, S. 124.

[15]) Ist γ durch $|z|=|e^{i\vartheta}|=1$, $\vartheta_1\leqq\vartheta\leqq\vartheta_2$, $\vartheta_2-\vartheta_1\leqq 2\pi$ dargestellt, so ist $\lg f(z)=\lg|f(z)|+i\theta(z)$ in $0<\varrho=|z|<1$, $\vartheta_1<\vartheta<\vartheta_2$ eindeutig regulär, wenn für $\theta(z)$ in einem inneren Punkte dieses Kreissektors irgendeine Bestimmung gewählt wird und für alle anderen Werte $\theta(z)$ durch stetige Fortsetzung aus diesem festgelegt wird. Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt dann:

$$\varrho\frac{\partial\lg|f(z)|}{\partial\varrho}=\frac{\partial\theta(z)}{\partial\vartheta}.$$

Da $f(z)$ längs jedes inneren Teilbogens des Kreisbogens γ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip fortsetzbar ist, so gilt diese Gleichung auch noch auf einem solchen Teilbogen: $\varrho=1$, $\vartheta_1<\vartheta_1'\leqq\vartheta\leqq\vartheta_2'<\vartheta_2$. Wegen $|f(z)|<1$ für $|z|<1$ ist für $0<|z|<1$ weiter

$$\frac{\lg|f(e^{i\vartheta})|-\lg|f(\varrho e^{i\vartheta})|}{1-\varrho}=-\frac{\lg|f(\varrho e^{i\vartheta})|}{1-\varrho}>0,\qquad\vartheta_1'\leqq\vartheta\leqq\vartheta_2',$$

und daher für $\varrho=|z|=1$, $\vartheta_1'\leqq\vartheta\leqq\vartheta_2'$

$$\frac{\partial\lg|f(z)|}{\partial\varrho}\geqq 0\ \text{ und somit auch }\ \frac{\partial\theta(e^{i\vartheta})}{\partial\vartheta}\geqq 0,$$

d. h. aber $\theta(e^{i\vartheta})$ ist eine monoton wachsende Funktion von ϑ. Analoges gilt für $\frac{f(z)}{z}$.

von γ (der Zuwachs von $\arg z$). Soll er gleich der Länge von γ sein, so muß notwendig $\frac{f(z)}{z} = \text{konst.}$ auf γ und daher nach einem bekannten Satz von Schwarz im Innern konstant sein, und zwar muß wegen $\frac{f(z)}{z} = 1$ auf γ $f(z) \equiv e^{i\tau} z$ sein.

Konforme Abbildung liefert sofort eine etwas allgemeinere Formulierung dieses Satzes:

G sei ein von einer geschlossenen Jordankurve C begrenztes Gebiet in der w-Ebene, w_0 sei ein Punkt in G. Es sei ferner $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär, $f(0) = w_0$, und es möge der Wertevorrat von $f(z)$ im Innern von G liegen. $f(z)$ möge überdies auf einem gewissen (von $f(z)$) abhängigen Bogen γ_f von $|z| = 1$ stetige Randwerte besitzen und γ_f auf ein festes (von f unabhängiges) Bogenstück c von C abbilden. $w = F(z)$ bilde $|z| < 1$ so auf G ab, daß $z = 0$ in $w = w_0$ übergeht. Die zu $F(z)$ inverse Funktion $z = \Phi(w)$ führt c in den Kreisbogen γ_F über.

Dann ist $\gamma_f \leqq \gamma_F$, und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $f \equiv F(e^{i\tau} z)$ ist (τ reell).

Beweis. $\zeta = \Phi(w)$ bildet G auf den Einheitskreis einer ζ-Ebene so ab, daß $w = w_0$ in $\zeta = 0$ übergeht. $\zeta = \Phi(f(z))$ genügt den Voraussetzungen des Löwnerschen Satzes und bildet γ_f auf γ_F ab. Daher ist $\gamma_f \leqq \gamma_F$. Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $\Phi(f(z)) = e^{i\tau} z$ ist, also $f(z) \equiv F(e^{i\tau} z)$ ist.

2. Für das Weitere führen wir noch die folgende Sprechweise ein: Es sei G ein von einer geschlossenen Jordankurve C begrenztes Gebiet, a ein Punkt in G. Wir bilden G so auf das Innere des Einheitskreises ab, daß a in den Nullpunkt übergeht. $\mathfrak{M}$ sei eine Punktmenge auf C, die bei dieser Abbildung auf eine meßbare Punktmenge $\mathfrak{M}'$ auf der Peripherie des Einheitskreises abgebildet wird. Dann nennen wir das Maß von $\mathfrak{M}'$ das *„konforme Maß von $\mathfrak{M}$ bei dieser Abbildung“ — durch die es offenbar eindeutig festgelegt ist — und bezeichnen es mit $m_{G,a}\mathfrak{M}$ oder auch mit $m_{C,a}\mathfrak{M}$.* Ist $\mathfrak{M}$ insbesondere ein Bogen γ von C, so ist auch $\mathfrak{M}'$ ein Bogen γ' der Kreisperipherie und $m_{G,a}\gamma$ ist die Länge von γ', die wir auch als die *„konforme Länge von γ“* bezeichnen wollen.

Wir formulieren nun den folgenden Spezialfall des obigen Satzes:

A. *Es sei G ein von einer geschlossenen Jordankurve C begrenztes Gebiet, G_1 ein Teilgebiet von G, das von einer Jordankurve C_1 begrenzt wird, und es habe C einen Bogen c mit C_1 gemeinsam. a sei ein in beiden Gebieten liegender Punkt. Dann ist*

$$m_{G,a}\, c \geqq m_{G_1,a}\, c\,,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $C \equiv C_1$ ist.

Hieraus ergibt sich sofort der folgende Satz:

B. *Es seien G und G_1 zwei von den Jordankurven C bzw. C_1 begrenzte Gebiete, und es möge C_1 ganz im Innern von G verlaufen bis auf endlich oder unendlich viele Bögen c_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), die C und C_1 miteinander gemeinsam haben. Die Gesamtheit der übrigen Bögen von C bzw. C_1 sei mit S bzw. S_1 bezeichnet. a sei ein im Innern von G und G_1 liegender Punkt. Dann ist*

$$m_{G_1,a} S_1 \geqq m_{G,a} S,$$

und auch hier gilt das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $C = C_1$ ist.

Denn es ist ja nach dem Satze A: $m_{G,a} c_\nu \geqq m_{G_1,a} c_\nu$ (wobei $m_{G,a} c_\nu = m_{G_1,a} c_\nu$ nur dann gilt, wenn $C \equiv C_1$ ist) und daher

$$m_{G_1,a} S_1 = 2\pi - \sum_\nu m_{G_1,a} c_\nu \geqq 2\pi - \sum_\nu m_{G,a} c_\nu = m_{G,a} S.$$

3. Es sei C eine geschlossene Jordankurve, $\bar{\beta}$ und β seien zwei echte Teilbögen von C, und β enthalte $\bar{\beta}$ [16]). P und Q seien die Endpunkte von β; der komplementäre Bogen zu β werde mit α bezeichnet. Ferner sei a ein im Innern von C gelegener Punkt. Wir sagen dann, *der Jordanbogen γ „schirmt" $\bar{\beta}$ von a ab*, wenn γ die Punkte P und Q miteinander verbindet und mit α eine geschlossene Jordankurve Γ bildet, die a in ihrem Innern, $\bar{\beta}$ (bis eventuell auf seine Endpunkte) in ihrem Äußeren enthält.

Dann gilt der folgende Satz:

C. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, a ein Punkt im Innern von C, $\widehat{PQ} = \alpha$ ein echter Teilbogen von C, β der komplementäre Bogen und $\bar{\beta}$ ein Teilbogen von β* [16]). *Der Bogen γ verbinde P und Q miteinander und möge dabei $\bar{\beta}$ von a abschirmen. Die von α und γ gebildete geschlossene Jordankurve sei mit Γ bezeichnet. Dann ist*

$$m_{C,a} \bar{\beta} \leqq m_{\Gamma,a} \gamma.$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Satze B, wenn der Bogen γ nicht außerhalb von C verläuft, s. Fig. 1. Es ist ferner auch noch sehr einfach, den Beweis für den Fall zu erbringen, daß γ zwar Punkte mit dem Äußeren von C gemeinsam hat, aber doch so verläuft, daß es möglich ist, eine die Bögen α und $\bar{\beta}$ als Teilbögen enthaltende geschlossene Jordankurve C^* zu finden, die sowohl das Innere von C als auch das von Γ enthält, s. Fig. 2 [17]). Für die weitere Anwendung, die wir von diesem Satze machen müssen, würde es genügen, den Satz für diesen

[16]) Insbesondere darf $\bar{\beta}$ mit β identisch sein.

[17]) Die Fig. 3 veranschaulicht eine Konfiguration, bei der diese Bedingungen über den Bogen γ offenbar in der schlichten Ebene nicht mehr erfüllt sind.

zuletzt genannten Fall zu beweisen. Allein um nicht den Begriff des „Abschirmens“ unnötigerweise einzuschränken, müssen wir den folgenden etwas komplizierteren Weg, als es der oben erwähnte ist, einschlagen.

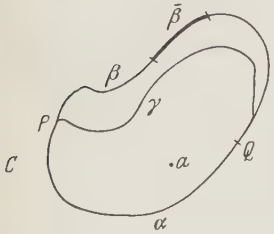

Fig. 1.

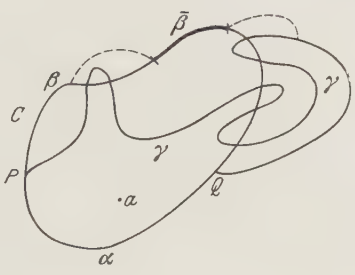

Fig. 2.

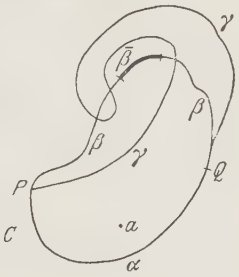

Fig. 3.

Zunächst bemerken wir, daß es sicher Bögen von γ gibt, die nicht zu C gehören. Denn der Bogen $\bar{\beta}$ von C liegt ja sicher außerhalb von Γ. Wir bezeichnen die Gesamtheit dieser Bögen von γ mit γ^*. Es sei nun G^* das größte einfach zusammenhängende Gebiet, das dem Durchschnitt des Innern von C und des Innern von Γ angehört und zugleich den Punkt a im Innern enthält. Nach einem Satze aus der Topologie der Kurven[18]) besteht der Rand von G^* aus einer geschlossenen (sich aus Bögen von C und γ^* zusammensetzenden) Jordankurve Γ^*. Γ^* enthält notwendig Bögen von γ^* und von C. Denn enthielte Γ^* keinen Bogen von γ^*, so hieße dies doch offenbar, daß Γ^* nur aus Bögen besteht, die sämtlich (auch) zu C gehören. Da nun aber C doppelpunktfrei ist, könnten nur dann Teilbögen von C eine geschlossene Jordankurve Γ^* bilden, wenn $\Gamma^* \equiv C$ wäre, und dies ist unmöglich, weil der Bogen $\bar{\beta}$ sicher außerhalb von Γ^* liegt. Enthielte andererseits Γ^* keinen Bogen von C, so müßte Γ^* aus lauter Bögen von γ bestehen. Teilbögen von γ können aber keine geschlossene Jordankurve bilden, da ja γ als doppelpunktfrei und nicht geschlossen vorausgesetzt wurde.

Die beiden geschlossenen Jordankurven C und Γ^*, von denen Γ^* nicht außerhalb von C liegt, enthalten also beide a im Innern und besitzen gemeinsame Randbögen *ohne miteinander identisch zu sein*. Es bezeichne nun S die Gesamtheit derjenigen Bögen von C, die nicht zu Γ^* gehören, und Σ die Gesamtheit der Bögen von Γ^*, die nicht zugleich C angehören. Unter den zuerst genannten befindet sich sicher $\bar{\beta}$, die zuletzt erwähnten

[18]) Vgl. B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie Bd. 1, Berlin 1923, S. 87. Dieser Satz lautet: *Es seien $j_1, j_2, \ldots, j_n$ endlich viele einfache geschlossene Kurven (Jordankurven), von denen je zwei einander in wenigstens zwei Punkten treffen. Der Rand eines beliebigen von der Menge $j_1 + j_2 + \ldots + j_n$ bestimmten Gebietes besteht aus einer einfachen geschlossenen Kurve.*

sind sämtlich im Bogen γ enthalten. Dann ist nach Satz B:

$$m_{C,a} S \leqq m_{\Gamma^*,a} \Sigma$$

und daher auch wegen $m_{C,a}\bar{\beta} \leqq m_{C,a} S$

$$m_{C,a}\bar{\beta} \leqq m_{\Gamma^*,a} \Sigma. \tag{1,1}$$

Nun betrachten wir Γ^* und Γ und bemerken, daß Γ^* nicht außerhalb von Γ liegt, sicher die Bögen Σ mit Γ gemeinsam hat, und daß schließlich beide Kurven a im Innern enthalten. Daher ist nach dem Satze A:

$$m_{\Gamma^*,a} \Sigma \leqq m_{\Gamma,a} \Sigma$$

und somit wegen $m_{\Gamma,a} \Sigma \leqq m_{\Gamma,a} \gamma$ und wegen (1,1)

$$m_{C,a}\bar{\beta} \leqq m_{\Gamma,a} \gamma, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

4. Wir besprechen nunmehr zwei geometrische Konfigurationen, auf die wir im folgenden unsere Sätze anwenden müssen. Unser Ziel wird hierbei im wesentlichen sein, die folgende Aufgabe zu lösen: Es sei C eine geschlossene Jordankurve, γ ein Bogen von C; wir suchen dann nach einer Abschätzung für $m_{C,a}\gamma$ (bei beliebigem a im Innern von C) nach oben und unten. Unter Heranziehung von Kreisabbildungen werden wir nun diese Frage in einem für unsere Zwecke hinreichendem Umfange beantworten können.

Hilfssatz 1. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve in der w-Ebene, k ein die Kurve C in mindestens zwei Punkten durchsetzender Kreis, $\alpha = \overset{\frown}{PQ}$ irgendein von zwei Schnittpunkten P und Q von k und C begrenzter Bogen von C, der bis auf seine Endpunkte außerhalb von k verläuft, γ der zu α komplementäre Bogen von C. Der Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$, der α zu einer geschlossenen, das Kreisinnere im Innern enthaltenden Jordankurve C_1 ergänzt, werde mit β bezeichnet. Es sei ferner c ein dem Durchschnitt der Innengebiete von k und C angehörender Punkt*[19]*, so daß also auch c im Innern von C_1 liegt. Schließlich möge $\bar{\beta}$ ein Teilbogen des Bogens β, also auch der Kurve C_1 sein, der durch den Bogen γ von C von c abgeschirmt wird*[20]*) (s. Fig. 4). Dann ist*

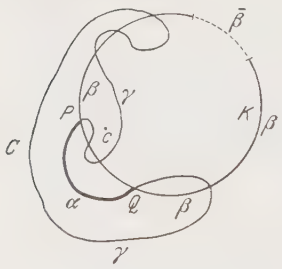

Fig. 4.

$$m_{k,c}\bar{\beta} \leqq m_{C,c}\gamma.$$

[19]) Offenbar gibt es einen solchen Punkt c, da ja k die Kurve C durchsetzen soll.

[20]) Es entspricht also die Kurve C_1 der Kurve, die wir in der Definition des Abschirmens mit C bezeichnet haben, und die Kurve C übernimmt die Rolle der dort mit Γ bezeichneten Kurve.

Beweis. Da der Bogen γ von C den Bogen $\bar{\beta}$ von C_1 von c abschirmt, ist nach Satz C

$$m_{C_1,c}\bar{\beta} \leqq m_{C,c}\gamma . \tag{1,2}$$

Nun ist aber das Innere des Kreises k im Innern von C_1 enthalten, und da der Bogen β beiden Kurven C_1 und k gemeinsam ist, so ist nach Satz A:

$$m_{k,c}\bar{\beta} \leqq m_{C_1,c}\bar{\beta},$$

woraus in Verbindung mit (1,2) die Behauptung folgt.

Hilfssatz 2. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, k ein die Kurve C in mindestens zwei Punkten durchsetzender Kreis. Es sei ferner $\alpha = \overset{\frown}{PQ}$ ein von zwei Schnittpunkten von k und C begrenzter, sonst außerhalb von k verlaufender Bogen von C mit den folgenden weiteren Eigenschaften: Ergänzt man α durch einen solchen der beiden Kreisbögen $\overset{\frown}{PQ}$, etwa γ, zu einer geschlossenen Jordankurve Γ, daß das Innere von k dem Äußeren von Γ angehört, so möge im Innern von Γ ein Punkt c' aus dem Innern von C liegen. β sei der zu α in bezug auf C komplementäre Bogen, $\bar{\beta}$ ein Teilbogen von β, der durch γ von c' abgeschirmt wird* (s. Fig. 5). *Dann ist*

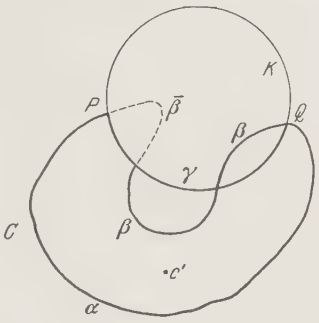

Fig. 5.

$$m_{C,c'}\bar{\beta} \leqq m_{k,c'}\gamma .$$

Beweis. Da der Bogen γ von Γ den Bogen $\bar{\beta}$ von C von c' abschirmt, ist

$$m_{C,c'}\bar{\beta} \leqq m_{\Gamma,c'}\gamma . \tag{1,3}$$

Nun gehört aber das Innere von Γ ganz dem *Äußeren* von k an, und da der Bogen γ sowohl k wie Γ angehört, so folgt nach dem Satze A[21]):

$$m_{\Gamma,c'}\gamma \leqq m_{k,c'}\gamma ,$$

woraus sich in Verbindung mit (1,3) die Behauptung ergibt. —

5. Wir leiten nunmehr einen sehr einfachen Hilfssatz über Jordankurven her, den wir gleichfalls später (§ 4, Nr. 21 und Nr. 30) verwenden werden.

[21]) Man beachte, daß es für die Gültigkeit der Sätze A und B (Nr. 2) gleichgültig ist, ob G bzw. G_1 das Innere oder das Äußere der diese Gebiete begrenzenden Jordankurven C bzw. C_1 sind.

Hilfssatz 3. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, c ein Punkt im Innern von C. g sei eine C in mindestens zwei Punkten durchsetzende Gerade, und $\alpha = \overset{\frown}{AB}$ sei ein Bogen von C, der (eventuell bis auf seine Endpunkte A, B, die auf g liegen dürfen) ganz auf der c abgewandten Seite von g verläuft. β sei der zu α komplementäre Bogen. Verbindet man dann A und B durch einen Jordanbogen γ, der die Kurve C höchstens in Punkten des Bogens α trifft und ganz auf derselben Seite von g bleibt wie α, so enthält die von γ und β gebildete geschlossene Jordankurve Γ den Punkt c im Innern* (s. Fig. 6).

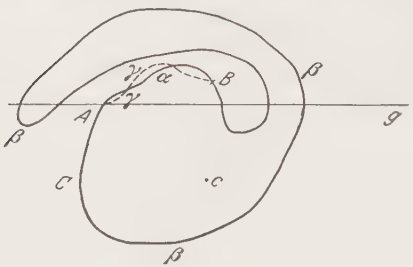

Fig. 6.

Beweis. Wir benutzen im folgenden als Kriterium dafür, daß ein Punkt P im Innern von C liegt, die Tatsache, daß *seine Ordnung $O(P, C)$ in bezug auf die Kurve C dann und nur dann gleich ± 1 ist, wenn P sich im Innern von C befindet*[22]). Dabei versteht man unter der Ordnung $O(P, C)$ des Punktes P in bezug auf die geschlossene Jordankurve C den $\frac{1}{2\pi}$-fachen Zuwachs des Winkels $\theta(Q)$, den der von P nach einem beliebigen Punkte Q von C gezogene Radiusvektor $\overrightarrow{PQ}$ mit der positiven reellen Achse (oder allgemeiner irgendeiner festen Geraden) bildet, bei einem vollen Umlauf des Punktes Q längs der Kurve C. Bezeichnet man also die Änderung des Winkels $\theta(Q)$ bei dem genannten Umlauf von Q längs C mit $\Delta\theta$, so ist

$$O(P, C) = \frac{\Delta\theta}{2\pi}.$$

Wir denken uns nun den Radiusvektor r vom Punkte c nach dem Punkte A gezogen; $\theta(A)$ sei der Winkel, den dieser Radiusvektor mit der positiven reellen Achse bildet, und zwar werde $\theta(A)$ durch die Bedingung $0 \leqq \theta(A) < 2\pi$ normiert. Der Endpunkt des Radiusvektors r möge nun stetig von A aus die Kurve C durchlaufen. Dabei ändert sich der Winkel θ, den r mit der positiven reellen Achse bildet, stetig mit dem Endpunkt Q, und wir denken uns diesen Winkel $\theta = \theta(Q)$ vom Werte $\theta(A)$ aus stetig fortgesetzt. Nach der Durchlaufung des Bogens α von A nach B möge der Winkel $\theta(Q)$ im Punkte B auf den Wert $\theta(B)$ und nach dem vollen Umlauf von C auf den Wert $\theta'(A)$ angewachsen sei. Da c im Innern von C liegt, ist $\theta'(A) = \theta(A) \pm 2\pi$. Ferner ist $|\theta(B) - \theta(A)| < \pi$, da ja c und der (offene) Bogen α auf verschiedenen Seiten von g liegen.

[22]) Vgl. z. B. B. von Kerékjártó loc. cit. S. 82f.

Nun denken wir uns die Kurve Γ zuerst von A nach B längs γ und dann von B nach A längs β durchlaufen. Im Punkte A bildet (bei der obigen Normierung) der von c nach A gezogene Radiusvektor r mit der positiven reellen Achse gleichfalls den Winkel $\theta(A)$. Nach der Durchlaufung von γ möge der stetig von $\theta(A)$ aus fortgesetzte Winkel $\theta = \theta(Q)$, den der von c nach dem Punkte Q von C gezogene Radiusvektor $r = r(Q)$ mit der positiven reellen Achse bildet, auf den Wert $\theta^*(B)$ angewachsen sein, nach dem vollen Umlauf von Γ möge sein Wert $\theta^*(A)$ sein. Es ist

$$\theta^*(B) - \theta(A) = [\theta(B) - \theta(A)] + 2\pi n,$$

wo n eine ganze Zahl $\gtrless 0$ ist. Es muß notwendig $n = 0$ sein. Denn da c und der Bogen γ auf verschiedenen Seiten von g liegen, ist dieser Winkel seinem absoluten Betrage nach sicher $< \pi$, und da auch $|\theta(B) - \theta(A)| < \pi$ ist, ist

$$\theta^*(B) - \theta(A) = \theta(B) - \theta(A), \qquad \theta^*(B) = \theta(B).$$

Da nun Γ den Bogen β mit C gemeinsam hat, ist

$$\theta^*(A) - \theta^*(B) = \theta'(A) - \theta(B),$$

und hieraus folgt wegen $\theta^*(B) = \theta(B)$

$$\theta^*(A) = \theta'(A) = \theta(A) \pm 2\pi, \qquad \frac{\theta^*(A) - \theta(A)}{2\pi} = \pm 1,$$

w. z. b. w.

6. Wir werden im folgenden unsere Sätze über das Verhalten des Differenzenquotienten der Abbildungsfunktion in einem Randpunkte P für Gebiete G formulieren, die von einer geschlossenen Jordankurve C begrenzt werden. Sie gelten dann aber auch für wesentlich allgemeinere Gebiete, nämlich für beliebige einfach zusammenhängende Gebiete, deren Rand einen *„freien"* Jordanbogen enthält, wenn der Randpunkt P innerer Punkt eines solchen Bogens ist. (Dabei verstehen wir unter einem „freien" Randbogen einen solchen, der sich durch einen geeigneten Querschnitt von G so zu einer geschlossenen Jordankurve ergänzen läßt, daß ihr Inneres ganz G angehört.) Dies ergibt sich sofort aus dem folgenden

Hilfssatz 4. *Sind G und G_1 zwei einfach zusammenhängende Gebiete, deren Ränder einen freien Jordanbogen C' gemeinsam haben, und stoßen die beiden Gebiete von derselben Seite an C' an, bilden ferner $\varphi(w)$ bzw. $\varphi_1(w)$ G bzw. G_1 auf $|z| < 1$ ab, so konvergiert für einen festen inneren Punkt w_1 von C' der Quotient*

$$(1,4) \qquad \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}$$

gegen eine von 0 verschiedene Konstante c, wenn w auf C' oder aus der Teilumgebung von C', die dem Durchschnitt von G und G_1 angehört gegen w_1 strebt. Es ist also

$$\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1} \sim c\,\frac{\varphi_1(w)-\varphi_1(w_1)}{w-w_1}\,.$$

Insbesondere gibt es also auch zwei Konstanten c_1 und c_2, so daß

$$0 < c_1 \leqq \left|\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{\varphi_1(w)-\varphi_1(w_1)}\right| \leqq c_2$$

für solche w gilt.

Der Inhalt dieses Satzes kann etwas unpräzis auch so wiedergegeben werden: Das Verhalten des Differenzenquotienten $\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1}$ hängt nur von der Umgebung des betrachteten Randpunktes ab, nicht aber von der Beschaffenheit der übrigen Teile von G.

Beweis. Zum Beweise darf man annehmen, daß G_1 im Innern von G (bis auf den Bogen C') liegt, da man sonst beide Gebiete G und G_1 mit einem dritten in beiden gelegenen vergleichen könnte. — Bei der Abbildung von G vermittels $z=\varphi(w)$ geht dann G_1 in ein im Innern von $|z|=1$ liegendes Gebiet D_1 über, das einen Bogen γ, das Bild von C', mit der Peripherie gemeinsam hat. Man beachte nun, daß man die Abbildung von G_1 auf den Einheitskreis $|\zeta|<1$ auch so durchführen kann, indem man G_1 vermittels $z=\varphi(w)$ auf D_1 und D_1 vermittels $\zeta=g(z)$ auf $|\zeta|<1$ passend abbildet. $g(z)$ ist dann noch auf jedem festen inneren Teilbogen γ' von γ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip analytisch und von 0 verschieden. Wegen $\zeta=\varphi_1(w)=g(\varphi(w))$, $z_1=\varphi(w_1)$ ist

$$\frac{\varphi_1(w)-\varphi_1(w_1)}{\varphi(w)-\varphi(w_1)} = \frac{g(z)-g(z_1)}{z-z_1}\,,$$

und da der Quotient $\frac{g(z)-g(z_1)}{z-z_1}$ mit $z\to z_1$ gegen eine von 0 verschiedene Zahl konvergiert, folgt hieraus die obige Behauptung.

7. Es seien nun G und G_1 zwei von den Jordankurven C und C_1 begrenzte Gebiete, wobei C_1 bis auf einen gemeinsamen Randbogen C' im Innern von G liegt. Für das Folgende ist es von Wichtigkeit, genauer zu wissen, in welcher Weise die eben erhaltenen Konstanten c_1 und c_2 von den Kurven C und C_1 abhängen, um für den Quotienten (1, 4) eine gleichmäßige Abschätzung auch für den Fall angeben zu können, daß es sich nicht nur um ein festes Paar solcher Kurven C und C_1 handelt, sondern um eine Schar von derartigen Kurvenpaaren C und C_1. In dieser Richtung beweisen wir den folgenden Satz (den wir gleich in der für die spätere Anwendung geeigneten Form aussprechen).

Hilfssatz 5. *Es sei $w = f_1(z)$ in $|z| < 1$ regulär, in $|z| \leqq 1$ stetig, und es möge $f_1(z)$ die Peripherie des Kreises in eine geschlossene Jordankurve C_1 überführen. Es sei γ ein den Punkt $z = 1$ im Innern enthaltender Bogen von $|z| = 1$. Sein Bild in der w-Ebene, das ein Teilbogen von C_1 ist, sei mit C' bezeichnet. Ferner möge eine volle Kreisscheibe mit dem Radius $d > 0$ um $f_1(0)$ als Mittelpunkt im Innern von C_1 Platz haben, und C_1 liege selbst innerhalb eines Kreises k_D mit dem Radius D um $f_1(0)$. C sei eine zweite im Innern von k_D verlaufende Jordankurve, die den Bogen C' mit C_1 gemeinsam hat und sonst C_1 im Innern enthält. $w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ so auf das Innere von C ab, daß $f(0) = f_1(0)$ und $f(1) = f_1(1) = w_1$ ist.*

Ist $z = \varphi_1(w)$ die zu $w = f_1(z)$, $z = \varphi(w)$ die zu $w = f(z)$ inverse Funktion, so gibt es eine nur von γ, d, D, sonst aber von den Kurven C, C_1 bzw. den Funktionen f, f_1 nicht weiter abhängige Konstante $c_2 \geqq 1$, so daß für $w \to w_1$ (w aus dem Innern von C_1 oder auf C_1)

$$1 \leqq \lim_{w \to w_1} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)} \right| \leqq c_2$$

gilt.

Beweis. Wir schicken die folgende Bemerkung voraus: Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der w-Ebene, das die volle Kreisscheibe um den in G liegenden Punkt $w = a$ mit dem Radius $d > 0$ enthält und selber ganz innerhalb des Kreises mit dem Radius D um $w = a$ liegt. Bildet $z = \Phi(w)$ G so auf $|z| < 1$ ab, daß $w = a$ in $z = 0$ übergeht, so ist für alle w in G

$$\left| \frac{w-a}{D} \right| \leqq |\Phi(w)| \leqq \left| \frac{w-a}{d} \right| . \tag{1,5}$$

Um die rechte der in (1, 5) steckenden Ungleichungen einzusehen, beachte man, daß, $w' = \frac{w-a}{d}$ gesetzt, $\psi(w') = \Phi(dw' + a) = \Phi(w)$, in $|w'| < 1$ regulär, absolut < 1 ist und daß ferner $z = \psi(w')$ im Nullpunkt verschwindet. Daher ist nach dem Schwarzschen Lemma $|\Phi(w)| = |\psi(w')| \leqq |w'| = \left| \frac{w-a}{d} \right|$, und da für $|w - a| > d$, $\left| \frac{w-a}{d} \right| > 1$ ist und $|\Phi(w)|$ in $G < 1$ ist, gilt diese Ungleichung für alle w in G. Um die linke der in (1, 5) steckenden Ungleichungen zu beweisen, hat man nur das Schwarzsche Lemma auf die zu $z = \Phi(w)$ inverse Funktion $w = F(z)$ oder genauer auf die Funktion $w' = \frac{F(z)-a}{D}$ anzuwenden. Diese Funktion ist in $|z| < 1$ regulär und absolut kleiner als 1 und verschwindet in $z = 0$. Daher gilt

$$\left| \frac{F(z)-a}{D} \right| \leqq |z| = |\Phi(w)|,$$

$$|\Phi(w)| \geqq \left| \frac{w-a}{D} \right| .$$

Aus dieser Bemerkung folgt nun zunächst, daß die Werte der Funktion $w = f_1(z)$ für $1 \geqq |z| \geqq \frac{1}{2}$ sicher außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2}$ um $w = f(0)$ liegen. Denn es ist für $|z| = |\varphi_1(w)| \geqq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \leqq |\varphi_1(w)| \leqq \frac{|w - f(0)|}{d},$$

also $|w - f(0)| \geqq \frac{d}{2}$. Wir wählen einen $z = 1$ als Mittelpunkt enthaltenden Teilbogen γ_z von γ so, daß das von γ_z und dem durch die Endpunkte von γ_z um $z = 1$ beschriebenen innerhalb von $|z| < 1$ liegenden Kreisbogen $\mathfrak{K}$ begrenzte Kreisbogenzweieck Z_z ganz außerhalb des Kreises $|z| = \frac{1}{2}$ liegt. Das Bild des Innern von Z_z bei der Abbildung durch $f_1(z)$ in der w-Ebene ist dann ein von einer Jordankurve Z_w umschlossenes Gebiet, das ganz außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2}$ um $w = f(0)$ liegt.

Bei der Abbildung des Inneren von C vermittels $u = \varphi(w)$ geht das Innere von C_1 in ein von einer geschlossenen Jordankurve Γ begrenztes Gebiet über. Z_w entspricht dabei einer geschlossenen, nirgends außerhalb von Γ verlaufenden Jordankurve Z_u, die einen (von den Funktionen f_1 und f abhängigen) Bogen γ_u mit der Peripherie gemeinsam hat. γ_u enthält $u = 1$ im Innern. Wir behaupten, Z_u verläuft außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2D}$ um $u = 0$. Dies ergibt sich aus der links in (1, 5) stehenden Ungleichung, angewandt auf die Funktion $z = \varphi(w)$ (für $\Phi(w)$). Denn da Z_w außerhalb des Kreises $|w - f(0)| = \frac{d}{2}$ liegt, ist für Punkte w aus Z_w nach dieser Ungleichung

$$\frac{d}{2D} \leqq |\varphi(w)|.$$

Jetzt beachte man, daß man die Funktion $z = \varphi_1(w)$ (analog wie im Beweise des obigen Hilfssatzes) auch so gewinnen kann, daß man das Innere von Γ auf $|z| < 1$ vermittels $z = \Psi(u)$ so abbildet, daß $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$ ist und die Funktion $z = \Psi(\varphi(w))$ bildet. Dann ist

$$\frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}{\varphi(w) - \varphi(w_1)} = \frac{\Psi(u) - \Psi(1)}{u - 1}.$$

Um den Quotienten auf der rechten Seite dieser Gleichung absolut abzuschätzen, wenden wir wieder wie oben das Spiegelungsprinzip an. Es sei $u = \psi(z)$ die zu $z = \Psi(u)$ inverse Funktion. $u = \psi(z)$ bildet den (festen, d. h. von f und f_1 unabhängigen) Bogen γ_z auf den Bogen γ_u, das Innere des Kreisbogenzweiecks Z_z auf das Innere der Jordankurve Z_u ab. Spiegeln wir nun Z_z an γ_z, so erhalten wir ein Kreisbogenzweieck Z_z' das längs γ_z mit Z_z zusammenstößt und mit diesem zusammen ein Kreisbogenzweieck $(Z_z + Z_z')$ bildet. Im Innern dieses neuen Kreisbogenzweiecks ist $u = \psi(z)$

regulär. Das durch $u = \psi(z)$ vermittelte Bild des Innern von Z_z' in der u-Ebene ist das Innere der durch Spiegelung von Z_u an γ_u entstehenden Jordankurve Z_u', und das Bild des Innern von $(Z_z + Z_z')$ ist das Innere derjenigen Jordankurve, die entsteht, wenn man von Z_u und Z_u' den Kreisbogen γ_u entfernt. Dieses Bildgebiet ist jedenfalls beschränkt, und zwar liegt es, da Z_u, wie oben gesagt, außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2D}$ um $u = 0$ verläuft, ganz innerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{2D}{d}$ um $u = 0$. Es gibt nun eine nur von γ_z, also nur von γ abhängige Zahl $\varrho > 0$, so daß $\psi(z)$ in $|z-1| \leqq \varrho$ regulär ist. Daher ist nach der Cauchyschen Koeffizientenabschätzung

$$(1,6) \qquad |\psi'(z)| \leqq \frac{2D}{d} \cdot \frac{1}{\frac{\varrho}{2}} = \frac{2K}{\varrho}, \qquad K = \frac{2D}{d}, \qquad |z-1| \leqq \frac{\varrho}{2}.$$

Um eine Abschätzung für $|\psi'(1)|$ nach unten herzuleiten, beachte man, daß wegen $|\psi(z)| \leqq |z|$ für positive $z < 1$ [23])

$$\frac{|\psi(1)-\psi(z)|}{|1-z|} = \frac{|1-\psi(z)|}{1-z} \geqq \frac{1-|z|}{1-z} = \frac{1-z}{1-z} = 1$$

ist. Da $\psi(z)$ in $z = 1$ regulär ist, folgt daraus mit $z \uparrow 1 \,|\psi'(1) \geqq 1$, und hieraus ergibt sich dann in Verbindung mit (1, 6) die Behauptung des Hilfssatzes.

§ 2.

Weitere Hilfssätze.

8. Hilfssatz 6. *Es sei k der Kreis $|w-a| \leqq \varrho$, $w_1 = a + \varrho e^{i\tau_1}$ sei ein Punkt der Peripherie von k. Ferner sei c ein Punkt im Innern von k im Abstande $\sigma\varrho$ von $w = w_1$, $0 < \sigma < 1$. Es werde $|c-a| = \lambda\varrho$ gesetzt, und χ $(\geqq 0)$ bezeichne den Winkel caw_1 im Dreieck caw_1* (siehe Fig. 7). *Bildet man dann k vermittels*

$$\zeta = \frac{\frac{w-a}{\varrho} - \frac{c-a}{\varrho}}{1 - \frac{w-a}{\varrho} \cdot \frac{\overline{c-a}}{\varrho}} e^{i\gamma} = \frac{(w-c)\varrho e^{i\gamma}}{\varrho^2 - (w-a)(\overline{c-a})}$$

(γ reell)

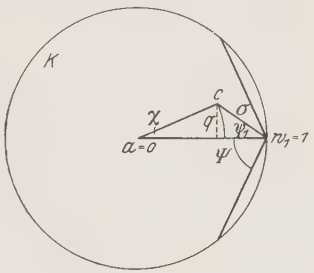

Fig. 7.

so auf den Einheitskreis ab, daß $w = c$ in $\zeta = 0$ übergeht, so gilt für die Bildlänge α_k' eines an w_1 anstoßenden Bogens der Länge $\varrho\alpha$, $0 \leqq \alpha \leqq \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$,

[23]) Vgl. für diese auf Herrn K. Löwner zurückgehende Überlegung L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II, S. 124.

der Kreisperipherie

$$(2,1)\qquad \alpha_k' \geqq \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda)^2+4\lambda\sin^2\frac{\alpha_0+\chi}{2}}\cdot\frac{\alpha\varrho}{\varrho} = A\frac{\alpha\varrho}{\varrho}.$$

Zusatz. *Der Punkt c liege im Innern des Winkelraumes W der Öffnung 2Ψ, $0 \leqq \Psi < \frac{\pi}{2}$, der von zwei von w_1 ausgehenden symmetrisch zum Radius in w_1 verlaufenden Kreissehnen gebildet wird. Macht man dann σ von α_0 abhängig, indem man für hinreichend kleine α_0 $\sigma = m\,\alpha_0^{2/3}(1+\vartheta(\alpha_0))$ setzt, wo m eine beliebige positive Konstante und $\vartheta(\alpha_0)$ eine mit $\alpha_0 \to 0$ gleichfalls gegen 0 konvergierende Funktion von α_0 ist, so gilt gleichmäßig für alle oben definierten Punkte c in k und W mit dem Abstand $R = \sigma\varrho$ von w_1*

$$\lim_{\alpha_0 \to 0} A\sigma \geqq 2\cos\Psi,$$

d. h. zu jedem ε mit $0<\varepsilon<1$ gibt es ein von ε — sowie Ψ, m und der Funktion $\vartheta(\alpha_0)$ — abhängiges $\delta(\varepsilon)$, so daß für alle $\alpha_0 \leqq \delta(\varepsilon)$ und für alle diese Punkte c mit dem Abstande R von w_1

$$A\sigma \geqq 2(1-\varepsilon)\cos\Psi, \qquad 0<\varepsilon<1,$$

gilt.

Bemerkung. Dieser Zusatz bleibt, wie leicht zu sehen ist, auch noch richtig, wenn der Punkt c im Abstande $R = \sigma\varrho$ von w_1 nicht den Winkelraum W der Öffnung 2Ψ, sondern in dem analog gebildeten Winkelraum W' der Öffnung $2(\Psi+\omega)$, $\omega > 0$, angenommen wird, wo ω nur Funktion von α_0 ist und mit $\alpha_0 \to 0$ selber gegen 0 konvergiert. ($\delta(\varepsilon)$ hängt dann auch noch von $\omega(\alpha_0)$ ab.)

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varrho = 1$, $\tau_1 = 0$, $\gamma = 0$. Man beachte nun, daß ($w - a = e^{i\vartheta}$ gesetzt)

$$(2,2)\qquad \alpha_k' = \left|\int_0^{\pm\alpha} \frac{d\zeta}{dw}\,d\vartheta\right| = \int \frac{1-|c-a|^2}{|1-(w-a)(\overline{c-a})|^2}\,d\vartheta$$

ist. Wir schätzen den Nenner des Integranden nach oben für $|\vartheta| \leqq \alpha \leqq \alpha_0$ ab. Es ist, wegen $c - a = \lambda e^{\pm i\chi}$

$$|1-(w-a)(\overline{c-a})|^2 = 1+\lambda^2-2\lambda\cos(\vartheta\mp\chi) = (1-\lambda)^2+4\lambda\sin^2\frac{\vartheta\mp\chi}{2}.$$

Wegen $|\vartheta| \leqq \alpha \leqq \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \chi < \frac{\pi}{2}$ [24]) ist weiter

$$|1-(w-a)(\overline{c-a})|^2 \leqq (1-\lambda)^2+4\lambda\sin^2\frac{\alpha_0+\chi}{2}.$$

[24]) Wegen $\sigma < 1$.

(Zwischen λ und σ besteht dabei die Relation

$$\sigma^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\chi = (1-\lambda)^2 + 4\lambda\sin^2\frac{\chi}{2}. \tag{2,3}$$

Daher folgt aus (2,2)

$$\alpha_k' \geqq \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda)^2 + 4\lambda\sin^2\frac{\alpha_0+\chi}{2}}\,\alpha,$$

w. z. b. w.

Beweis des Zusatzes. Es ist nach (2,1), (2,3)

$$\sigma A = \frac{(1-\lambda^2)\sqrt{(1-\lambda)^2 + 4\lambda\sin^2\frac{\chi}{2}}}{(1-\lambda)^2 + 4\lambda\sin^2\frac{\alpha_0+\chi}{2}} = \frac{(1+\lambda)(1-\lambda)^2\sqrt{1+\frac{4\lambda\sin^2\frac{\chi}{2}}{(1-\lambda)^2}}}{(1-\lambda)^2\left(1+\frac{4\lambda\sin^2\frac{\alpha_0+\chi}{2}}{(1-\lambda)^2}\right)},$$

$$\sigma A = \frac{(1+\lambda)\sqrt{1+\frac{4\lambda\sin^2\frac{\chi}{2}}{(1-\lambda)^2}}}{1+\frac{4\lambda\sin^2\frac{\alpha_0+\chi}{2}}{(1-\lambda)^2}}. \tag{2,4}$$

Aus der Figur 7 folgt leicht (ψ_1 ist der Winkel $c\,w_1\,a$ im Dreieck $c\,w_1\,a$)

$$\sin\chi = \frac{q}{\lambda} \geqq \frac{1-\lambda}{\lambda}\operatorname{tg}\psi_1 \tag{2,5}$$

und daher

$$\sin\frac{\chi}{2} = \frac{\sin\chi}{2\cos\frac{\chi}{2}} \geqq \frac{\sin\chi}{2} \geqq \frac{1-\lambda}{2\lambda}\operatorname{tg}\psi_1.$$

Somit ergibt sich für den Zähler Z in (2,4)

$$Z \geqq (1+\lambda)\sqrt{1+\frac{4\lambda(1-\lambda)^2\operatorname{tg}^2\psi_1}{4\lambda^2(1-\lambda)^2}} \tag{2,6}$$

$$= (1+\lambda)\sqrt{1+\frac{\operatorname{tg}^2\psi_1}{\lambda}} \geqq (1+\lambda)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi_1} = \frac{1+\lambda}{\cos\psi_1}.$$

Bei der Abschätzung des Nenners in (2,4) gehen wir so vor: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ mögen im folgenden Größen bezeichnen, die — bei festem Ψ, m und fester Funktion $\vartheta(\alpha_0)$ — gleichmäßig in ψ_1 mit $\alpha_0 \to 0$ gegen 0 konvergieren. Dann folgt wegen

$$\lambda^2 = 1 + \sigma^2 - 2\sigma\cos\psi_1, \qquad 1-\lambda^2 = 2\sigma\cos\psi_1 - \sigma^2$$

und wegen $\cos\psi_1 \geqq \cos\Psi > 0$ für hinreichend kleines α_0

$$1-\lambda = \sigma(2\cos\psi_1 - \sigma)\frac{1}{1+\lambda} = \sigma(1+\varepsilon_1)\cos\psi_1, \qquad 1+\varepsilon_1 > 0.$$

Daher wird (vgl. (2, 5))

$$\sin\chi = \frac{q}{\lambda} = \frac{\sigma \sin\psi_1}{\lambda} = (1-\lambda)\cdot\frac{\operatorname{tg}\psi_1}{1+\varepsilon_1},$$

$$\chi = (1+\varepsilon_2)(1-\lambda)\operatorname{tg}\psi_1$$

und somit

$$\alpha_0 + \chi = \alpha_0 + (1+\varepsilon_2)(1-\lambda)\operatorname{tg}\psi_1,$$

$$\sin\frac{\alpha_0+\chi}{2} = \frac{1+\varepsilon_3}{2}\left(\alpha_0 + (1+\varepsilon_2)(1-\lambda)\operatorname{tg}\psi_1\right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\lambda\sin^2\frac{\alpha_0+\chi}{2}}{(1-\lambda)^2} &= (1+\varepsilon_4)\left(\frac{\alpha_0}{1-\lambda} + (1+\varepsilon_2)\operatorname{tg}\psi_1\right)^2 \\
&= (1+\varepsilon_4)\left(\frac{\alpha_0}{\sigma(1+\varepsilon_1)\cos\psi_1} + (1+\varepsilon_2)\operatorname{tg}\psi_1\right)^2 \\
&\leqq (1+|\varepsilon_4|)\left(\frac{\sigma^{3/2}}{m^{3/2}\cdot(1+\vartheta)^{3/2}\sigma(1+\varepsilon_1)\cos\psi_1} + (1+\varepsilon_2)\operatorname{tg}\psi_1\right)^2 \\
&= (1+|\varepsilon_4|)\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{m^{3/2}(1+\vartheta)^{3/2}(1+\varepsilon_1)\cos\psi_1} + (1+\varepsilon_2)\operatorname{tg}\psi_1\right)^2.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also für den Nenner N in (2, 4) die Abschätzung

$$N \leqq 1 + \operatorname{tg}^2\psi_1(1+\varepsilon_5) + C\sqrt{\sigma} \leqq \frac{1}{\cos^2\psi_1} + \varepsilon_5\operatorname{tg}^2\Psi + C\sqrt{\sigma},$$

wo C bei festem m und fester Funktion $\vartheta(\alpha_0)$ eine nur von Ψ abhängige Konstante ist, wenn α_0 hinreichend klein angenommen wird. Hieraus und aus (2, 6) ergibt sich unmittelbar die Behauptung des Zusatzes.

9. Hilfssatz 7. *Es sei k der Kreis $|w-a| = \varrho$, $w_1 = a + \varrho e^{i\tau_1}$ sei ein Punkt der Peripherie von k. Ferner bezeichne W den von zwei von $w = w_1$ ausgehenden symmetrisch zur Außennormalen in w_1 verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraum der Öffnung 2Ψ, $0 \leqq \Psi < \frac{\pi}{2}$. c sei ein Punkt in W (mit Rand) im Abstande $\sigma\varrho$ von w_1, $\sigma > 0$, so daß also c außerhalb von k liegt. Bildet man dann das Äußere des Kreises $|w-a| = \varrho$ vermittels*

$$\zeta = \frac{\frac{w-a}{\varrho} - \frac{c-a}{\varrho}}{1 - \frac{w-a}{\varrho}\cdot\frac{\overline{c-a}}{\varrho}} e^{i\gamma} = \frac{(w-c)\varrho e^{i\gamma}}{\varrho^2 - (w-a)(\overline{c-a})} \qquad (\gamma \text{ reell}) \tag{2,7}$$

auf den Einheitskreis ab, so daß $w = c$ in $\zeta = 0$ übergeht, so gilt für die Bildlänge α_k' eines Bogens der Länge $\alpha\varrho$ der Kreisperipherie

$$\alpha_k' \leqq \frac{(2+\sigma)^2}{2\sigma\cos\Psi}\frac{\alpha\varrho}{\varrho} = A_1\frac{\alpha\varrho}{\varrho}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varrho = 1$, $\tau_1 = 0$, $\gamma = 0$. Wegen (2, 7) ist dann

$$\left|\frac{d\zeta}{dw}\right| = \frac{|c-a|^2-1}{|1-(w-a)(\overline{c-a})|^2},$$

und daher ergibt sich durch Integration (ähnlich wie oben)

$$\alpha_k' \leqq \frac{|c-a|^2-1}{(|c-a|-1)^2}\alpha = \frac{|c-a|+1}{|c-a|-1}\alpha.$$

Nun ist $|c-a| = \sqrt{1+\sigma^2+2\sigma\cos\psi_1}$ (siehe Fig. 8). Daraus folgt

$$\frac{|c-a|+1}{|c-a|-1} = \frac{\sqrt{1+\sigma^2+2\sigma\cos\psi_1}+1}{\sqrt{1+\sigma^2+2\sigma\cos\psi_1}-1} = \frac{\left(\sqrt{1+\sigma^2+2\sigma\cos\psi_1}+1\right)^2}{\sigma^2+2\sigma\cos\psi_1} \leqq \frac{(2+\sigma)^2}{2\sigma\cos\psi_1} \leqq \frac{(2+\sigma)^2}{2\sigma\cos\Psi},$$

und daher, wie behauptet,

$$\alpha_k' \leqq \frac{(2+\sigma)^2}{2\sigma\cos\Psi}\alpha.$$

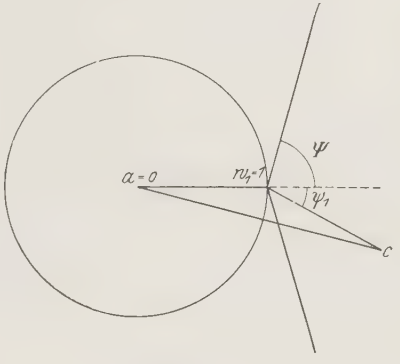

Fig. 8.

10. Wir leiten nun noch zwei Hilfssätze her, in denen wir die folgende Aufgabe behandeln. Es sei C eine geschlossene Jordankurve, α ein fester Bogen von C. Wir bilden das Innere von C auf den Einheitskreis ab und zwar so, daß einmal ein im Innern von C liegender Punkt $w = w_0$ in den Nullpunkt, und ein anderes Mal ein in C liegender Punkt $w = c \neq w_0$ in den Nullpunkt übergeht. Wir fragen dann, wie sich die konforme Länge von α beim Übergang von einer Abbildung zur anderen ändert, insbesondere auch dann, wenn c gegen den Rand konvergiert und die Größe von α in bestimmter Weise von c abhängig gemacht wird.

Hilfssatz 8. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve in der w-Ebene, α ein Bogen von C. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von C so auf $|z| < 1$ ab, daß $w = w_0$ im Innern von C in $z = 0$ übergeht; $\zeta = \Phi(w)$ vermittele die Abbildung des Inneren von C auf $|\zeta| < 1$ so, daß $w = c \neq w_0$ $\zeta = 0$ entspricht. Hat das Bild von α bei der ersten Abbildung die Länge α', bei der zweiten die Länge α'', so ist*

$$\alpha' \frac{1-|\varphi(c)|}{1+|\varphi(c)|} \leqq \alpha'' \leqq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\alpha'.$$

Der Beweis ergibt sich einfach aus der Bemerkung, daß man $\Phi(w)$ aus $\varphi(w)$ gewinnen kann, indem man den Kreis $|z| < 1$ auf $|\zeta| < 1$ vermittels

$$\zeta = \frac{z-b}{1-z\bar{b}}e^{i\gamma}, \quad b = \varphi(c), \quad \gamma \text{ reell},$$

abbildet, so daß $z=0$ in $\zeta=b$ übergeht. Dann ist $\Phi(w)=\frac{\varphi(w)-\varphi(c)}{1-\varphi(w)\,\overline{\varphi(c)}}e^{i\nu}$. Daher ist (vgl. den Beweis von Hilfssatz 6)[25])

$$\alpha''=\left|\int\limits_{(\alpha')}\frac{1-|b|^2}{|1-z\bar{b}|^2}\,d\vartheta\right|\leqq\frac{1-|b|^2}{(1-|b|)^2}\alpha'=\frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\alpha',$$

$$\alpha''\geqq\frac{1-|b|^2}{(1+|b|)^2}\alpha'=\frac{1-|\varphi(c)|}{1+|\varphi(c)|}\alpha'.$$

Hilfssatz 9. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, $\widehat{PQ}=\alpha$ ein Bogen von C. $z=\varphi(w)$ bilde das Innere von C so auf $|z|<1$ ab, daß $w=w_0$ (im Innern von C) in $z=0$, $P(w=w_1)$ in $z=1$ und α in einen Bogen der Länge α' der Kreisperipherie übergeht. $\zeta=\Phi(w)=\frac{\varphi(w)-\varphi(c)}{1-\varphi(w)\,\overline{\varphi(c)}}$ vermittele die Abbildung des Innern von C auf $|\zeta|<1$, so daß $w=c\neq w_0$ $\zeta=0$ und α einem Kreisbogen der Länge α'' entspricht. Der Punkt P werde als fest, der Punkt Q als variabel angenommen. Ferner möge für $Q\to P$ auch $c\to P$ konvergieren, und zwar so, daß der Bildpunkt $b=\varphi(c)=|b|e^{i\chi}$ von c in der z-Ebene innerhalb des Winkelraumes*

$$\pi-\tau_1\leqq\arg(z-1)\leqq\pi+\tau_1,\qquad 0<\tau_1<\frac{\pi}{2},$$

bleibt. Schließlich mögen Q und c so gegen P gehen, daß für hinreichend kleine $\overline{PQ}$ (und $\overline{Pc}$) $\alpha''\leqq\delta<\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\tau_1\right)$ ist. Dann ist für genügend kleine $\overline{PQ}$ und $\overline{Pc}$

$$\alpha'\leqq\frac{1-|b|}{2|b|\cos^2\left(\tau_1+\frac{\delta+|\chi|}{2}\right)}\alpha'',$$

$$b=\varphi(c)=|b|e^{i\chi}.$$

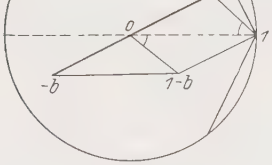

Fig. 9.

Beweis. Es ist

$$\zeta_1=\Phi(w_1)=\frac{1-\varphi(c)}{1-\overline{\varphi(c)}}=\frac{1-b}{1-\bar{b}}$$

und

$$\arg\Phi(w_1)=\arg\frac{1-b}{1-\bar{b}}=\vartheta_1.$$

Aus der Figur 9 erkennt man, daß wegen unserer Annahme $|\vartheta_1|\leqq 2\tau_1<\pi$ ist[26]).

---

[25]) Das Zeichen $\int\limits_{(\alpha')}$ soll bedeuten, daß über den Bildbogen von α in der z-Ebene von der Länge α' integriert werden soll.

[26]) Bei geeigneter Zählung des $\arg\frac{1-b}{1-\bar{b}}$. In der Figur 9 ist das Viereck mit den Endpunkten 1, b, 0, $1-b$ ein Parallelogramm, bei dem die Seite $0\ldots 1-b$ parallel und gleich der Seite $b\ldots 1$ ist.

Wir haben nun, da $z = \varphi(w) = \dfrac{\zeta + b}{1 + \bar{b}\zeta}$, $\zeta = \Phi(w)$, ist,

$$\alpha' = \left| \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_1 \pm \alpha''} \frac{1 - |b|^2}{|1 + \bar{b}\zeta|^2} \, d\vartheta \right|$$

nach oben abzuschätzen. Zu diesem Zwecke wählen wir $\overline{PQ}$ so klein, daß bereits $|\alpha''| \leqq \delta < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tau_1\right)$ und $|\arc b| = |\chi| \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tau_1\right)$ ist und schätzen den Nenner des Integranden für alle $\zeta = e^{i\vartheta}$ mit ϑ in $\langle \vartheta_1, \vartheta_1 \pm \delta \rangle$, $|\vartheta_1| \leqq 2\tau_1$, ab. Dann ist

$$\begin{aligned} |1 + \bar{b}\, e^{i\vartheta}|^2 &= 1 + |b|^2 + 2|b| \cos(\vartheta - \chi) \\ &= (1 - |b|)^2 + 4|b| \cos^2 \frac{\vartheta - \chi}{2} \\ &\geqq (1 - |b|)^2 + 4|b| \cos^2\left(\frac{2\tau_1 + \delta + |\chi|}{2}\right) \\ &= (1 - |b|)^2 + 4|b| \cos^2\left(\tau_1 + \frac{\delta + |\chi|}{2}\right); \end{aligned}$$

mithin wird

$$\alpha' \leqq \frac{(1 - |b|)(1 + |b|)\,\alpha''}{4|b| \cos^2\left(\tau_1 + \dfrac{\delta + |\chi|}{2}\right)} \leqq \frac{1 - |b|}{2|b| \cos^2\left(\tau_1 + \dfrac{\delta + |\chi|}{2}\right)} \alpha'',$$

w. z. b. w.

§ 3.

Die Unbewalltheitsfunktion, die Richtungsfunktion und der metrische Parameter einer Jordankurve.

11. Um das Verhalten eines Jordanbogens in der Umgebung eines seiner Punkte zu charakterisieren, wollen wir die folgenden Begriffsbildungen einführen.

Wir verstehen unter einem „*Kurvenelement*“ c einen Punkt P und einen durch diesen Punkt hindurchgehenden (stetigen) Kurvenbogen b, wobei das Kurvenelement — definitionsgemäß — als dasselbe anzusehen ist, wenn der Bogen b durch einen P als inneren Punkt enthaltenden Teilbogen b' ersetzt wird. Die Beziehung zwischen dem Kurvenelement c, und dem Punkt P, der bei der Definition des Kurvenelements zugrunde gelegt wird, bringen wir zum Ausdruck, indem wir sagen, c gehe durch P hindurch.

12. Um das Verhalten eines solchen Kurvenelementes zu charakterisieren, führen wir die „*Unbewalltheitsfunktion*“ ein. Diese soll folgendermaßen definiert werden: Wir beschreiben um den Punkt P, durch den c hindurchgeht, einen Kreis k_ε mit so kleinem Radius $\varepsilon > 0$, daß k_ε bereits das Kurvenelement c (in endlich oder unendlich vielen Punkten) schneidet.

Durchläuft man den Bogen b von P aus zuerst in der einen Richtung und dann in der entgegengesetzten, so möge in der einen Durchlaufungsrichtung der letzte Schnittpunkt von b mit k_ε der Punkt P_1 und in der anderen der letzte derartige Schnittpunkt P_2 sein. Wir betrachten dann die (abgeschlossene) Kreisscheibe k_Δ mit dem kleinsten Radius $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ um P, welche die beiden Kurvenbögen $\overset{\frown}{PP_1}$, $\overset{\frown}{PP_2}$ enthält (siehe Fig. 10).

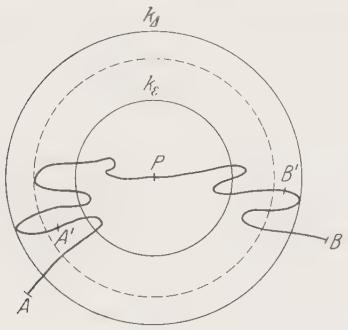

Fig. 10.

$\Delta(\varepsilon)$ ist dann offenbar (wegen der Stetigkeit des Kurvenbogens b) eine mit $\varepsilon \downarrow 0$ monoton gegen 0 abnehmende von rechts (aber nicht notwendig von links) stetige Funktion. Ferner ist $\Delta(\varepsilon)$ in dem folgenden Sinne von der „Ausdehnung" des Bogens b von c unabhängig: Ersetzt man b durch einen P als inneren Punkt enthaltenden Teilbogen b', so hat offenbar $\Delta(\varepsilon)$ für alle hinreichend kleinen ε [27]) denselben Wert. Daher kann man $\Delta(\varepsilon)$ zur Charakterisierung einer Eigenschaft des Kurvenelementes benutzen, und wir bezeichnen $\Delta(\varepsilon)$ als die *„Unbewalltheitsfunktion" des Kurvenelements* c. — Im folgenden wird es vor allem auf den Quotienten $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ankommen. Wir werden verlangen, daß der $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ endlich ist, oder also, daß $\Delta(\varepsilon)$ der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt.

13. Wir führen ferner zur weiteren Charakterisierung eines Kurvenelementes die sogenannte *Richtungsfunktion* ein. Ein Kurvenelement heiße *„gerichtet"*, wenn es im Punkte P, durch den es hindurchgeht, eine Tangente besitzt. Es möge nun c ein gerichtetes Kurvenelement sein. Es sei $\varepsilon > 0$. Wir schließen dann die Tangente in P zwischen zwei durch P hindurchgehende Geraden g_1 und g_2 ein, die mit der Tangente in P den Winkel ε bilden. Dann gibt es ein $r = r(\varepsilon) > 0$, so daß der Kreis um P mit $r(\varepsilon)$ nur Punkte von c im Innern oder auf dem Rande enthält, die zugleich

[27]) Dieses ε muß zunächst so klein gewählt werden, daß $\Delta(\varepsilon)$ gleichzeitig für b und b' erklärt werden kann. Dies reicht aber unter Umständen nicht aus, wie aus der Figur 10 hervorgeht, sondern es muß eventuell ε noch kleiner angenommen werden, damit die Unwalltheitsfunktion bei beiden Erklärungen denselben Wert hat. In der Figur 10 ist nämlich das Kurvenelement c einmal durch den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ und dann durch dessen Teilbogen $\overset{\frown}{A'B'}$ repräsentiert. Der Kreis k_ε stellt den Kreis mit dem Radius ε um P dar, der Kreis k_Δ ist der Kreis mit dem Radius Δ bei der Definition von $\Delta(\varepsilon)$ für den Bogen $\overset{\frown}{AB} = b$, der kleinere (punktierte) Kreis stellt den Kreis mit dem Radius $\Delta'(\varepsilon)$ bei der Definition von $\Delta(\varepsilon)$ für den Teilbogen $\overset{\frown}{A'B'} = b'$ von $\overset{\frown}{AB}$ dar.

dem von g_1 und g_2 gebildeten Winkelraume (einschließlich der Schenkel) der Öffnung 2ε angehören. (Um ein solches $r(\varepsilon)$ eindeutig festzulegen, können wir, wenn c aus dem Winkelraum hinaustritt, für $r(\varepsilon)$ immer den größten der oben genannten Werte $r(\varepsilon)$ wählen. Sonst können wir $r(\varepsilon) > 0$ und sonst beliebig annehmen.) Wir bezeichnen eine solche Funktion $r(\varepsilon)$ als eine Richtungsfunktion von c. Verkürzt oder verlängert man den Bogen b, so bleibt von einem ε an jede solche Funktion $r(\varepsilon)$ Richtungsfunktion von c.

14. Um nun das Verhalten einer geschlossenen Jordankurve in der Umgebung eines ihrer Punkte zu charakterisieren, benutzen wir die eben eingeführten Begriffsbildungen in der folgenden Weise: *Wir verstehen unter der Unbewalltheitsfunktion von C im Punkte P und, falls C in P eine Tangente besitzt, unter der Richtungsfunktion von C im Punkte P die Unbewalltheitsfunktion bzw. Richtungsfunktion eines durch P hindurchgehenden Kurvenelementes von C.* Diese Funktionen bringen dann in der Tat nur eine Eigenschaft dieser Kurve in der Umgebung dieses Punktes zum Ausdruck. — Genügt insbesondere die Unbewalltheitsfunktion von C in P der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, so wollen wir sagen, C sei in P *linear unbewallt.* Existiert überdies der $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ und ist er $= 1$ (dieser Fall wird im folgenden eine wichtige Rolle spielen), so nennen wir C in P *regulär unbewallt.*

Es sei noch für das Folgende darauf hingewiesen, daß die Bedingungen $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ und $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ invariant gegenüber einer Transformation der Form $u - u_1 = (w - w_1)^\alpha$, $\alpha > 0$, reell, bleibt, wo w_1 der Punkt P ist. Denn nach der Durchführung der Transformation wird dieser Quotient $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ gleich $\frac{\Delta^\alpha}{\varepsilon^\alpha}$.

15. Es sei nun C eine geschlossene Jordankurve, P_0 ein Punkt von C, und *es möge die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von C in P_0 der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügen.* Wir werden zeigen, daß dann eine gewisse für uns wichtige Parameterdarstellung der Kurve möglich ist. Unter *dieser Annahme existieren nämlich ausgezeichnete Parameter t, die wir als metrische Parameter in bezug auf den Punkt P_0 bezeichnen wollen, mit der folgenden Eigenschaft: Entspricht etwa P_0 der Parameterwert t_0, so gibt es zwei positive Zahlen c_1, C_1, $c_1 < C_1$, so daß*

$$0 < c_1 \leqq \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right| < C_1 \tag{3,1}$$

ist, wo, wenn $P(t)$ der dem Parameterwert t entsprechende Kurvenpunkt ist, $r(t)$ die Länge des Radiusvektors $\overline{P_0 P(t)}$ bedeutet. Umgekehrt folgt

aus der Existenz eines metrischen Parameters, daß die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt.

Da sich ein metrischer Parameter z. B. mit einer beliebigen von 0 verschiedenen Konstanten multiplizieren läßt, ist nur der Quotient $\frac{C_1}{c_1}$ oder genauer, $L = \lim_{t \to t_0} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right|$, $l = \underline{\lim}_{t \to t_0} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right|$ gesetzt, der Quotient $\frac{L}{l}$ wesentlich. Bei unserem Beweis für die oben behauptete Tatsache wird sich überdies ein einfacher Zusammenhang dieses Quotienten mit dem $\overline{\lim}_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \varkappa$ ergeben, nämlich: *Es ist für endliches $\varkappa$ stets $\varkappa \leqq \frac{L}{l}$, und es gibt geeignete metrische Parameter, für die dieser Quotient $\frac{L}{l} = \varkappa$ ist.*

Beweis. a) Wir nehmen an, daß die Kurve C in irgendeiner Parameterdarstellung $P = P(t^*)$ gegeben ist, P_0 sei $= P(0)$. Zu jedem ν von einem $\nu = \nu_0$ an gehört ein größter Wert $t^* > 0$, den wir mit t_ν^* bezeichnen, so daß $P(0)P(t_\nu^*) = \frac{1}{\nu} = r_\nu$ ist. Dann bilden die Punkte t_ν^* ($\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \ldots$) eine Einteilung des Intervalls $t_{\nu_0}^*, \ldots, 0$ in unendlich viele Teilintervalle. Wir bilden jedes Intervall $t_{\nu+1}^* \leqq t^* \leqq t_\nu^*$ ($\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \ldots$) eineindeutig stetig und monoton (etwa linear) auf das t-Intervall $\frac{1}{\nu+1} \leqq t \leqq \frac{1}{\nu}$ ab; dadurch geht für $t_{\nu-1}^* \leqq t^* \leqq t_\nu^*$ $r(t^*)$ in $r(t^*(t))$ über. Für $\frac{1}{\nu+1} \leqq t \leqq \frac{1}{\nu}$ ist dann $\frac{1}{\nu+1} \leqq r(t^*(t)) \leqq \frac{\varkappa(1+\omega_\nu)}{\nu}$, wo $\varkappa = \overline{\lim}_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$, $\omega_\nu > 0$, $\lim_{\nu \to \infty} \omega_\nu = 0$ ist, da wir ja für jedes ν den größten Wert t_ν^* genommen hatten. Schreiben wir für $r(t^*(t))$ $r_1(t)$, so gilt für $\frac{1}{\nu+1} \leqq t \leqq \frac{1}{\nu}$

$$(3,2) \qquad \frac{\nu}{\nu+1} \leqq \left| \frac{r_1(t)}{t} \right| \leqq \frac{\varkappa(\nu+1)(1+\omega_\nu)}{\nu}$$

woraus für $t > 0$ wegen $\frac{\nu+1}{\nu} \to 1$ die Behauptung folgt. Für $t < 0$ ist der Beweis analog. — Überdies folgt aus der Ungleichung (3, 2), daß für den eben angegebenen metrischen Parameter der Quotient $\frac{L}{l} \leqq \varkappa$ $\left(L = \overline{\lim}_{t \to 0} \left| \frac{r_1(t)}{t} \right|, \; l = \underline{\lim}_{t \to 0} \left| \frac{r_1(t)}{t} \right| \right)$ ist.

b) Wir beweisen nun die Umkehrung, und zwar zeigen wir: Ist t ein in bezug auf den Punkt P_0 metrischer Parameter von C, gilt also (3, 1) oder

$$(3,3) \qquad 0 < l = \underline{\lim}_{t \to t_0} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right| \leqq L = \overline{\lim}_{t \to t_0} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right| < \infty,$$

so gilt für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von C in P_0 $\overline{\lim}_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \varkappa \leqq \frac{L}{l}$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P_0 = P(0)$. Wäre nun die Behauptung falsch, so gäbe es für ein passendes $\sigma > 0$ eine Folge von Radien $r_\nu \downarrow 0$ und Punkten $P_\nu = P(t_\nu)$, $P'_\nu = P(t'_\nu)$ mit $\overline{P_0 P_\nu} = \overline{P_0 P'_\nu} = r_\nu$, die beide von derselben Seite [28]) gegen P_0 konvergieren, so daß der von P_ν, P'_ν begrenzte P_0 nicht enthaltende Bogen bis auf seine Endpunkte P_ν, P'_ν außerhalb des Kreises mit r_ν um P_0 läge und daß man auf ihm einen Punkt Q_ν finden könnte, für den

$$\frac{\overline{P_0 Q_\nu}}{P_0 P_\nu} = \frac{\overline{P_0 Q_\nu}}{P_0 P'_\nu} > \frac{L}{l} + \sigma$$

wäre. Wir dürfen annehmen, daß die P_ν, P'_ν und Q_ν zugeordneten Parameterwerte bzw. t_ν, t'_ν, $\bar{t}_\nu$ positiv sind und der Ungleichung $t_\nu < \bar{t}_\nu < t'_\nu$ genügen; dann folgt aus (3, 3), daß von einem ν an, etwa für $\nu \geqq \nu_0$,

$$\frac{P_0 Q_\nu}{\bar{t}_\nu} = \frac{r(\bar{t}_\nu)}{\bar{t}_\nu} \leqq L + l\frac{\sigma}{2}$$

ist. Wegen $\frac{\overline{P_0 Q_\nu}}{P_0 P'_\nu} = \frac{r(t_\nu)}{r(t'_\nu)} > \frac{L}{l} + \sigma$ folgt weiter

$$\frac{r(t'_\nu)}{t'_\nu} = \frac{r(t'_\nu)}{r(\bar{t}_\nu)} \cdot \frac{r(\bar{t}_\nu)}{\bar{t}_\nu} \cdot \frac{\bar{t}_\nu}{t'_\nu} \leqq \frac{L + l\frac{\sigma}{2}}{\frac{L}{l} + \sigma} = \frac{L + l\frac{\sigma}{2}}{L + l\sigma} \cdot l < l,$$

im Widerspruch mit der Annahme, daß $\lim\limits_{t \to 0} \left| \frac{r(t)}{t} \right| = l$ ist.

Hieraus ergibt sich nun auch unmittelbar die zweite über den Zusammenhang von $\varkappa$ und $\frac{L}{l}$ ausgesprochene Behauptung. Denn aus dem unter b) Bewiesenen folgt, daß notwendig, wenn ein metrischer Parameter existiert: $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \varkappa \leqq \frac{L}{l}$ ist. Andererseits gibt es aber, wie in a) gezeigt, einen metrischen Parameter t, für den $\frac{L}{l} \leqq \varkappa$ gilt. Da für diesen aber auch notwendig $\frac{L}{l} \geqq \varkappa$ gelten muß, besteht also für diesen metrischen Parameter die Relation $\frac{L}{l} = \varkappa$.

16. Insbesondere erhalten wir aus dem obigen Satze das folgende Resultat: Hinreichend und notwendig dafür, daß es einen Parameter t für die Kurve C gibt, für den $\lim\limits_{t \to 0} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right| = \alpha > 0$ gilt, ist, daß $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ mit $\varepsilon \downarrow 0$ besteht.

Denn ist $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$, so gibt es nach dem obigen stets einen metrischen

[28]) D. h. es gibt einen von P verschiedenen Punkt Q von C, so daß alle Punkte P_ν einem und demselben Bogen $\overset{\frown}{PQ}$ angehören.

Parameter t mit $\frac{L}{l} = 1$, also $L = l$. Existiert umgekehrt ein metrischer Parameter, für den $L = l = \alpha > 0$ ist, so folgt, daß für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ im betreffenden Punkte die Relation gilt $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \varkappa \leqq 1$. Da aber andererseits wegen $\Delta(\varepsilon) \geqq \varepsilon$ stets $1 \leqq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ist, muß $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ existieren und gleich 1 sein, w. z. b. w.

17. Später werden uns noch die beiden folgenden Bemerkungen von Nutzen sein.

1. Ist t ein metrischer Parameter der Kurve C in bezug auf den Punkt P $(w = w_1)$ und unterwirft man die Kurve C der Transformation $u = (w - w_1)^\alpha$, $\alpha > 0$, so ist $\sigma = |t|^\alpha \operatorname{sgn} t$ ein metrischer Parameter der transformierten (nicht notwendig doppelpunktfreien Kurve Γ[29]) in dem w_1 entsprechendem Punkte $u = 0$. Denn es gilt ja, wenn

$$0 < c_1 \leqq \left| \frac{w(t) - w_1}{t} \right| \leqq C_1$$

ist, auch, wenn wir $u(\sigma) = u(|t|^\alpha \operatorname{sgn} t) = (w(t) - w_1)^\alpha$ setzen,

$$0 < c_1^\alpha \leqq \frac{u(\sigma)}{\sigma} \leqq C_1^\alpha.$$

2. Wir werden uns im folgenden vor allem mit derjenigen Parameterdarstellung einer geschlossenen Jordankurve C befassen, welche durch die Abbildungsfunktion $w = f(z)$ des Einheitskreises $|z| < 1$ auf das Innere von C für $z = e^{i\vartheta}$, $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, geliefert wird. Bleibt nun für ein ϑ_1, $f(e^{i\vartheta_1}) = w_1$, der Quotient

$$\left| \frac{f(e^{i\vartheta_1}) - w_1}{\vartheta - \vartheta_1}^{\alpha} \right| \tag{3,4}$$

zwischen zwei festen Schranken oder konvergiert er für $\vartheta \to \vartheta_1$ gegen einen endlichen Grenzwert, so ist definitionsgemäß $t = |\vartheta - \vartheta_1|^\alpha \operatorname{sgn}(\vartheta - \vartheta_1)$ ein metrischer Parameter von C in bezug auf $w = w_1$. *Damit der Differenzenquotient* (3,4) *zwischen zwei positiven Schranken bleibt resp. gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, ist also notwendig, daß die Kurve C einen metrischen Parameter t in bezug auf* $w = w_1$ *besitzt, für den im zweiten Falle* $\lim_{t \to 0} \frac{w(t) - w_1}{t}$ *existiert und* > 0 *ist, und somit also auch nach Nr.* 16, *daß für die Unbewalltheitsfunktion* $\Delta(\varepsilon)$ *von C in* $w = w_1$ $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ *bzw.* $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ *gilt.*

[29]) Wir hatten oben zwar den metrischen Parameter nur für eine doppelpunktfreie Kurve C definiert, doch kann diese Definition unverändert auf eine beliebige geschlossene Kurve übertragen werden, wenn ihre Punkte umkehrbar eindeutig und stetig auf einen Parameter t bezogen werden können.

§ 4.

Formulierung und Beweis der Hauptungleichungen.

18. Satz 1. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve in der w-Ebene, die im Punkte P $(w = w_1)$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, besitzt. Ferner sei C in P linear unbewallt, d. h. die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von C in P genüge der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere G von C so auf $|z| < 1$ ab, daß ein in G gelegener Punkt $w = w_0$ in $z = 0$ übergeht. W bezeichne den von zwei von w_1 ausgehenden symmetrisch zur Winkelhalbierenden des Eckenwinkels in w_1 verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraum der Öffnung 2ψ, $0 \leqq \psi < \frac{\pi\tau}{2}$.*

Dann gibt es zwei positive Konstanten K_1 und q_1, sowie zu jedem $w \neq w_1$ auf C mit $|w - w_1| \leqq q_1$ ein $R > 0$, so daß für jeden Punkt c im Innern von C und W mit $|w_1 - c| = R$

$$(4,1) \qquad \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \geqq K_1 \frac{|\varphi(c) - \varphi(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}} \cos^2\left(\frac{\psi}{\tau}\right)$$

gilt. Dabei ist $R \leqq \pi^\tau |w - w_1|^{5/6}$.[30])

Ist $\varkappa = \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$, so kann $K_1 = (1 - \omega)\frac{1}{\varkappa^{1/\tau}}$, $0 < \omega < 1$, gesetzt werden, wo ω beliebig klein gemacht werden kann, wenn q_1 hinreichend klein angenommen wird.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varphi(w_1) = 1$. — Es sei zunächst $\tau = 1$. Wir dürfen uns beim Beweise der Ungleichung (4, 1) auf den Fall beschränken, daß der Punkt w auf einem festen der von P ausgehenden Äste der Kurve C liegt, der etwa mit C^* bezeichnet werde. Es sei $\eta > 0$, $\eta < \frac{\pi}{16}$, $\sqrt{\eta} < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \nu_0$. Wir können die Tangente an C in P zwischen zwei durch P hindurchgehende Geraden g_1 und g_2 einschließen, die mit dieser den Winkel η bilden (s. Fig. 11). Dann beschreiben wir um P den Kreis $\mathfrak{K}$ mit so kleinem Radius $r \leqq \eta$, daß sämtliche Punkte von C, die innerhalb oder auf $\mathfrak{K}$ liegen, auch zugleich in das Innere der beiden von g_1 und g_2 gebildeten (Scheitel-) Winkelräume W_1 und W_2 der Öffnung 2η fallen, und daß ferner mit jedem Punkt Q von C innerhalb von $\mathfrak{K}$ einer der Bögen $\overset{\frown}{PQ}$ von C (bis auf den Endpunkt P) sich im Innern von W_1 oder W_2 befindet. Darüber hinaus wählen wir r noch so klein, daß für alle $\varepsilon \leqq r$ $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} < \frac{3}{2}\varkappa$ ist. Da der Winkelraum W mit W_1 und W_2 $\left(\text{wegen } \eta < \frac{\pi}{2} - \psi\right)$ keinen Punkt außer P gemeinsam hat, liegt dann der Sektor S_r, der von $\mathfrak{K}$ aus dem

[30]) Man vgl. auch die Anmerkung am Schlusse des Beweises von Satz 1 (Nr. 25).

Winkelraum W herausgeschnitten wird, (bis auf P) ganz in G. — Wir werden η und r unten noch weiter einschränken; im übrigen sind aber η und r während des ganzen Beweises *feste*, wenn auch für unsere Zwecke hinreichend kleine Zahlen. — Nun ziehen wir von P aus unter dem Winkel $\eta_1 = \sqrt{\eta} > \eta$ gegen die Normale in P auf der dem eben genannten Zweig C^* von C zugewandten Seite der Normalen einen Strahl g, der mit einem an P anstoßenden Stück in G verläuft. Wie oben gesagt, ist $\eta_1 = \sqrt{\eta} < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) - r_0$. Für jeden hinreichend nahe bei P gelegenen Punkt w auf C^* können wir einen durch P und w hindurchgehenden Kreis k'_w finden, dessen Mittelpunkt a' auf g liegt, dessen Radius dann gleich $a'\bar{w} = \varrho'$ ist, und der ganz innerhalb von $\mathfrak{K}$ liegt. Der Kreis k'_w wird dann die Kurve C in endlich oder unendlich vielen Punkten schneiden; sämtliche Schnittpunkte liegen jedenfalls innerhalb *eines* der Winkelräume W_1, W_2, etwa in W_1, und zwar auf derselben Seite der Normalen wie der Strahl g.

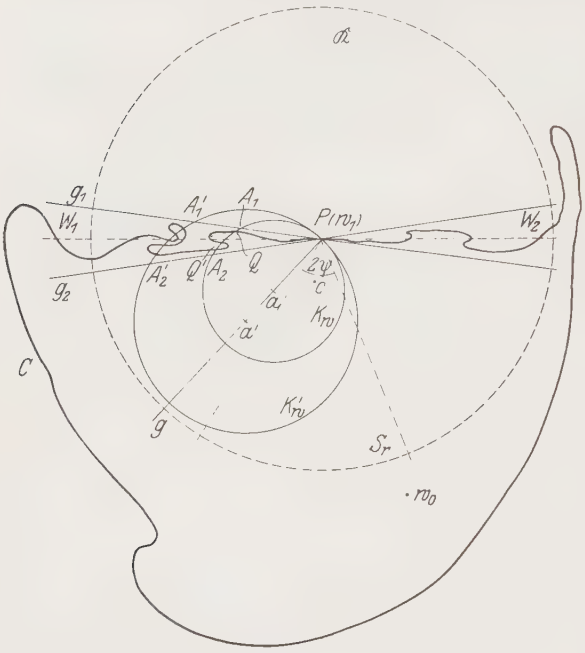

Fig. 11.

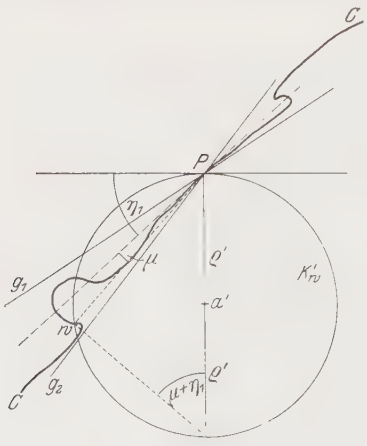

Fig. 12.

Man kann übrigens leicht den Zusammenhang zwischen dem Punkte w und dem Radius ϱ' von k'_w formelmäßig ausdrücken. Bildet die von w_1 nach w gezogene Sehne von C mit der Tangente von C in P den Winkel μ (μ werde positiv gerechnet, wenn w auf derselben Seite der Tangente liegt wie die Innennormale von C in P), so ist (s. Fig. 12)

$$(4,2) \qquad \varrho' = \frac{|w - w_1|}{2\sin(\mu + \eta_1)} = \frac{|w - w_1|}{2\sin(\mu + \sqrt{\eta})}, \qquad -\eta \leqq \mu \leqq \eta.$$

Es sei schon jetzt erwähnt, daß für die im Satze genannte Zahl R sich später der Wert

$$(4,3) \qquad R = (1-\varepsilon)\,\eta^{\frac{1}{8}}\,\frac{|w-w_1|}{2\sin(\mu+\frac{1}{2}\eta)}\cdot\frac{1}{\varkappa}, \quad -\eta \leqq \mu \leqq \eta, \quad 0<\varepsilon<1,$$

ergeben wird, wo ε mit $\eta \downarrow 0$ gleichfalls gegen 0 konvergiert.

19. Es werde nun eine positive Zahl $\varrho < \varrho'$ durch die Relation

$$\varrho = \frac{1-\omega'}{\varkappa}\,\varrho'\,\frac{\sin(\eta_1-\eta)}{\sin(\eta_1+\eta)}$$

bestimmt, wo $0<\omega'<1$ und $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \leqq \varkappa(1+\omega')$ für alle $\varepsilon \leqq r$ und $\lim_{r\downarrow 0}\omega' = 0$ ist. Dann ist auch offenbar

$$(4,4) \qquad \frac{1-\omega'}{\varkappa} = \frac{2\varrho\sin(\eta_1+\eta)}{2\varrho'\sin(\eta_1-\eta)} < \frac{1}{\varkappa(1+\omega')}.$$

Wir markieren den Punkt a auf g im Abstande ϱ von P und beschreiben mit dem Radius ϱ um a den Kreis k_w. Der Zähler des zweiten Gliedes in (4,4) ist dann gleich der Länge der längsten von P ausgehenden und in dem Winkelraum W_1 verlaufenden Sehne d (in der Fig. 11 PA_2) von k_w, der Nenner gleich der kürzesten derartigen Sehne d' von k'_w (in der Fig. 11 PA'_1). Es sei B ein Kurvenbogen von C, der von zwei von P verschiedenen Schnittpunkten von C und k_w begrenzt ist und sonst außerhalb von k_w verläuft, falls es einen solchen Bogen gibt. Der im Winkelraum W_1 gelegene Kreisbogen von k_w liegt nun bis auf den einen seiner Endpunkte innerhalb des Kreises mit dem Radius d um P. Daher kann wegen der Voraussetzung $\Delta(\varepsilon) \leqq \varkappa\cdot\varepsilon\ (1+\omega')$ und wegen (4,4) B nicht in das Äußere des Kreises mit dem Radius $\varkappa d(1+\omega') < d'$ um P eindringen. Weil ferner der innerhalb des Winkelraumes W_1 gelegene Kreisbogen von k'_w nicht in das Innere des Kreises mit dem Radius d' um P eindringt, kann B den Kreis k'_w nicht mehr treffen. *Wenn man also C von P aus in den Winkelraum W_1 hinein durchläuft, so werden sämtliche Schnittpunkte von k_w mit C vor dem Punkte w angetroffen.* Ferner gilt auch für die Länge der kürzesten von P ausgehenden Sehne d_1 von k_w in W_1 $(=2\varrho\sin(\eta_1-\eta))$ (in der Fig. PA_1) und die der längsten derartigen Sehne d'_1 von k'_w $(=2\varrho'\sin(\eta_1+\eta))$ (in der Fig. PA'_2) die Relation

$$(4,5) \qquad \frac{d_1}{d'_1} = \frac{2\varrho\sin(\eta_1-\eta)}{2\varrho'\sin(\eta_1+\eta)} = \frac{2\varrho\sin(\eta_1+\eta)\cdot\sin^2(\eta_1-\eta)}{2\varrho'\sin(\eta_1-\eta)\cdot\sin^2(\eta_1+\eta)} = \frac{(1-\omega')}{\varkappa}\cdot\frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)}.$$

Der Quotient $\frac{\sin(\eta_1-\eta)}{\sin(\eta_1+\eta)}$ konvergiert wegen $\eta_1 = \frac{1}{2}\eta$ mit $\eta \to 0$ gegen 1. — Von dieser Gleichung werden wir später noch Gebrauch zu machen haben. —

20. Wir bemerken noch, daß offenbar die Länge des kleineren der durch g_2 abgeschnittenen Bögen von k_w gleich $2\varrho(\eta_1+\eta)$ ist. Dabei ist

der zuerst in das Innere der Kurve C eindringende Schenkel von W_1 gerade die eine Halbgerade von g_2. Da jeder Schnittpunkt des Kreises k_w mit C innerhalb des Winkelraumes W_1 liegt, ist die Länge eines jeden (kleineren) Kreisbogens von P bis zu einem dieser Schnittpunkte höchstens gleich $2\varrho(\eta_1 - \eta)$. Ferner liegt mit jedem Punkt Q von C innerhalb von k_w oder auf k_w auch einer der Bögen $\overset{\frown}{PQ}$ von C (bis auf P) im Innern des Winkelraumes W_1. Dies folgt aus der Tatsache, daß k_w im Innern von $\mathfrak{K}$ liegt, und aus der zweiten der oben genannten Eigenschaften von $\mathfrak{K}$.

21. Es sei nun Q der Schnittpunkt von k_w mit C, den man zuerst antrifft, wenn man k_w von P aus so durchläuft, daß man bei P das Innere der Kurve verläßt, Q' der erste Schnittpunkt, den man beim Durchlaufen der Kurve C in dem Sinne antrifft, daß man bei P das Innere von k_w verläßt. Insbesondere könnte auch $Q = Q'$ sein. Den ersten dabei erhaltenen Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$ bezeichnen wir mit β, den zweiten (bis auf seine Endpunkte) außerhalb k_w verlaufenden Kurvenbogen $\overset{\frown}{Q'P}$ mit α. γ sei der zu α komplementäre Kurvenbogen $\overset{\frown}{PQ'}$ von C. — Es sei nun c ein Punkt in S_r im Abstande $R = \varrho\sigma$ von P, wo zunächst $0 < \sigma < 2\sin\frac{\nu_0}{2} < 1$ sei. (Es ist $\varrho\sigma < \varrho < \varrho' < r$.) Der Punkt c liegt dann, wie man leicht einsieht[31]), im Innern von k_w. Weiter unten werden wir noch σ in geeigneter Weise von η abhängig machen. Der kleinere Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ'} = \beta$ bildet mit dem Bogen $\alpha = \overset{\frown}{PQ'}$ von C eine geschlossene Jordankurve C_1. C_1 enthält den Punkt c und somit auch das Innere von k_w im Innern. Dies folgt sofort aus dem Hilfssatz 3, wenn man folgendes beachtet: Der Kurvenbogen $\gamma = \overset{\frown}{PQ'}$ verläuft (bis auf P) nach dem am Schlusse der vorigen Nummer Gesagten ganz im Innern des Winkelraumes W_1. Da ferner sowohl der

---

[31]) Denn ist u der Abstand von c vom Mittelpunkt a des Kreises k_w und ist $\sphericalangle\, a w_1 c = \psi_1$, so ist

$$u^2 = \varrho^2 + \varrho^2\sigma^2 - 2\varrho^2\sigma\cos\psi_1 = \varrho^2(1 + \sigma^2 - 2\sigma\cos\psi_1),$$

und wegen

$$\psi_1 \leqq \eta_1 + \psi \leqq \nu_0 + \psi = \nu_0 + \frac{\pi}{2} - 2\nu_0 = \frac{\pi}{2} - \nu_0, \qquad \cos\psi_1 \geqq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \nu_0\right) = \sin\nu_0,$$

$$2\cos\psi_1 \geqq 2\sin\nu_0 > 2\sin\frac{\nu_0}{2}$$

ist

$$2\sigma\cos\psi_1 > 2\sigma\sin\frac{\nu_0}{2} > \sigma^2, \qquad 2\sigma\cos\psi_1 - \sigma^2 > 0,$$

also

$$0 < 1 + \sigma^2 - 2\sigma\cos\psi_1 < 1$$

und

$$u < \varrho,$$

d. h. c liegt in der Tat im Innern von k_w.

Kreisbogen $\widehat{PQ'} = \beta$ als auch γ vom Punkte P auf g_2 ausgehen, *sonst aber g_2 überhaupt nicht mehr treffen*[32]) und den gemeinsamen Endpunkt $Q'(\neq P)$ haben, müssen sie beide auf derselben Seite von g_2 bleiben und zwar auf der gleichen Seite wie die *Außennormale* von C in P. Der Punkt c dagegen liegt im Innern des Winkelraumes W (der Öffnung 2ψ). Dieser Winkelraum hat mit der Geraden g_2 nur den Punkt P gemeinsam (da nämlich g_2 um den Winkel $\eta < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ gegen die Tangente in P geneigt ist), liegt also ganz auf einer Seite von g_2, und da er ferner die *Innennormale* von C in P (als Winkelhalbierende) enthält, befindet er sich auf der entgegengesetzten Seite von g_2 wie die Bögen γ und β. Daher ist in der Tat der Hilfssatz 3 anwendbar. Die Kurve C und der Kreis $k = k_w$ bilden dann offenbar eine Konfiguration, die den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 genügt, wobei für die dort genannten Bögen α, γ, β, $\bar{\beta}$ sowie für die dort mit C und C_1 bezeichneten geschlossenen Jordankurven und den dort erwähnten Punkt c gerade die hier mit genau denselben Symbolen bezeichneten Gebilde gewählt werden können. Daher gilt

$$m_{k,c}\,\bar{\beta} \leqq m_{C,c}\,\gamma\,. \tag{4,6}$$

22. Δ bezeichne den Kurvenbogen $\widehat{w w_1}$, der bei P in das Innere von k_w eindringt. Nach dem oben (Nr. 19) über die Schnittpunkte von k_w mit C und den Punkt w Gesagten enthält Δ den Bogen γ und daher ist auch ($m_{C,w_0}\Delta = \Delta'_C$ gesetzt)

$$m_{C,w_0}\gamma \leqq m_{C,w_0}\Delta \equiv \Delta'_C\,. \tag{4,7}$$

Nach Hilfssatz 8 gilt nun

$$m_{C,c}\,\gamma \leqq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\, m_{C,w_0}\gamma \tag{4,8}$$

---

[32]) Es bedarf vielleicht noch einer Erläuterung dafür, daß der Kreisbogen $\beta = \widehat{PQ'}$ die Gerade g_2 *nur* in P trifft: Die Geraden g_1 und g_2 schneiden k_w in je einem weiteren Punkte A_1 (auf g_1) bzw. A_2 (auf g_2). Durchläuft man die Strecke PA_2 von P nach A_2, so tritt man zunächst in das Innere, durchläuft man die Strecke PA_1 von P nach A_1, so tritt man zunächst in das Äußere von C. Da aber C — nach dem am Schlusse von Nr. 20 Gesagten liegen alle Punkte von C im Innern von k_w oder auf k_w auch zugleich im *Innern* von W_1 — weder PA_2 noch PA_1 treffen kann, liegt also auch noch A_2 ganz innerhalb und A_1 ganz außerhalb von C. Der Kreisbogen β tritt nun bei P in das Äußere von C und verläuft zunächst (nach der Konstruktion von k_w) außerhalb von W_1 und W_2. Um nun die Kurve C zum erstenmal in Q zu treffen, muß k_w in das Innere des Winkelraumes W_1 gelangen, muß daher eine der beiden Geraden g_1 oder g_2 schneiden. Da dieser Schnittpunkt selber noch außerhalb von C liegen muß, kann er nur A_1 sein. Weil schließlich der Endpunkt Q' von β im *Innern* des Winkelraumes W_1 liegt, kann β überhaupt nur eine der beiden Geraden g_1 und g_2 treffen, er trifft also nur g_1 und nicht mehr g_2.

und daher ist auch wegen (4, 6), (4, 8) und (4, 7)

$$(4,9)\qquad m_{k,c}\bar{\beta} \leqq m_{C,c}\gamma \leqq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\, m_{C,w_0}\gamma \leqq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\, \Delta'_C .$$

Wir wollen nun $m_{k,c}\beta$ zu $\bar{\beta}$ in Beziehung setzen und wenden zu diesem Zwecke den Hilfssatz 6 an. Beachtet man, daß nach dem in Nr. 20 Gesagten für den in diesem Hilfssatz genannten Winkel α_0 als obere Schranke von $\alpha = \frac{\beta}{\varrho}\ 2(\eta_1+\eta)$ gesetzt werden kann, so folgt nach diesem Hilfssatz

$$(4,10)\qquad m_{k,c}\bar{\beta} \geqq A\frac{\bar{\beta}}{\varrho}, \qquad A = \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda)^2 - 4\lambda\sin^2\left(\eta_1+\eta+\frac{\chi}{2}\right)} .$$

Dabei ist $\lambda = \frac{|c-a|}{\varrho}$ und $\chi\ (\geqq 0)$ der Winkel caw_1 im Dreieck caw_1. Somit folgt schließlich, da die Länge des Kreisbogens $\bar{\beta} > \overline{PQ} = \delta_w$ ist, wegen (4, 10) und (4, 9)

$$A\frac{\delta_w}{\varrho} \leqq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\, \Delta'_C, \qquad \Delta'_C \geqq \delta_w \frac{1-|\varphi(c)|}{1+|\varphi(c)|}\, \frac{1}{\varrho} A .$$

Nun beachte man, daß zwischen δ_w und der Länge der Sehne $ww_1 = \Delta_w$ nach (4, 5) die Relation

$$\frac{\delta_w}{\Delta_w} \geqq \frac{1-\omega'}{\varkappa}\, \frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)}$$

besteht. Es gilt daher

$$\Delta'_C \geqq \Delta_w \frac{1-\omega'}{\varkappa}\, \frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)}\, \frac{A\sigma}{\sigma\varrho}\, \frac{1-|\varphi(c)|}{1+|\varphi(c)|}$$

und somit wegen $\sigma\varrho = |w_1 - c|$, $1+|\varphi(c)| < 2$

$$(4,11)\qquad \Delta'_C \geqq \Delta_w \frac{1-\omega'}{\varkappa}\, \frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)}\, \frac{A\sigma}{2}\, \frac{1}{|w_1-c|}\, \varphi(c) .$$

23. Wir können hier den Faktor $A\sigma$ noch weiter abschätzen, indem wir jetzt über σ geeignet verfügen und dann den Zusatz zum Hilfssatz 6 anwenden. Die im Hilfssatz 6 und Zusatz mit α_0 bezeichnete Größe kann hier, wie oben gesagt (Nr. 22), gleich $2(\eta_1+\eta)$ gesetzt werden. Wir wählen nun die in diesem Zusatz benutzten Größen $m = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{\vartheta}}$, $1+\vartheta = (1+\sqrt{\eta})^{-\frac{3}{8}}$; dann wird also $\sigma = \eta^{\frac{1}{8}}$. Ferner bemerken wir, daß die Voraussetzung der an diesen Zusatz angeschlossenen Bemerkung mit $\Psi = \psi$, $\omega = \eta_1 = \sqrt{\eta}$ erfüllt sind. (Eventuell muß η für die Anwendbarkeit dieses Zusatzes noch weiter verkleinert werden.) Nach diesem Zusatz und der anschließenden Bemerkung gibt es daher zu jedem *hinreichend kleinen* η ein nur von η abhängiges $\varepsilon_1(\eta)$ mit $0 < \varepsilon_1 < 1$, das mit $\eta \downarrow 0$ selber gegen 0 geht, so daß

$$(4,12)\qquad A\sigma \geqq 2(1-\varepsilon_1)\cdot\cos\psi, \qquad 0 < \varepsilon_1 < 1,$$

ist. Wir denken uns η so gewählt, daß (4, 12) gilt.

Durch diese Festlegung von σ ist das im Satze genannte $R = \sigma\varrho$ bestimmt, und es ist, wie bereits oben angegeben wurde,

$$(4,3')\quad R = \frac{1-\omega'}{\varkappa}\,\frac{\sin(\eta_1-\eta)}{\sin(\eta_1+\eta)}\,\frac{|w-w_1|}{2\sin(\mu+\sqrt{\eta})}\,\eta^{\frac{1}{3}} = (1-\varepsilon)\,\frac{|w-w_1|}{2\sin(\mu+\sqrt{\eta})}\,\frac{1}{\varkappa}\,\eta^{\frac{1}{3}},$$

$$-\eta \leqq \mu \leqq \eta, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

wo ε nur von η und r abhängt und mit $\eta \downarrow 0$ (wegen $r \leqq \eta$) gleichfalls gegen 0 geht. Wegen $\sin(\mu+\sqrt{\eta}) \geqq \sin\left(\sqrt{\eta}(1-\sqrt{\eta})\right) \geqq \frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\eta}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\eta}$, $|w-w_1| \leqq r \leqq \eta$ und $\varkappa \geqq 1$ ist $R \leqq \pi\cdot|w-w_1|^{5/6}$. —

Schließlich wollen wir noch in (4, 11) $1-|\varphi(c)|$ durch $|1-\varphi(c)|$ zu ersetzen suchen und machen hierzu von der Tatsache Gebrauch, daß die Abbildung $z=\varphi(w)$ in $w=w_1$ winkeltreu ist. Denn danach [33]) wird der oben genannte Sektor S_r, den der Winkelraum W (der Öffnung 2ψ) aus dem Kreise $\mathfrak{K}$ mit dem Radius r um w_1 herausschneidet, durch $z=\varphi(w)$ auf einen Bereich der z-Ebene abgebildet, der in dem Sektor

$$|z-1| \leqq \varepsilon'(r), \qquad \pi-(\psi+\varepsilon''(r)) \leqq \arg(z-1) \leqq \pi+\psi+\varepsilon''(r)$$

liegt, wo $\varepsilon'(r)$, $\varepsilon''(r) > 0$ sind — bei festem ψ — *nur* von r abhängen und mit $r \downarrow 0$ selber gegen 0 gehen. Schränkt man daher r auf hinreichend kleine Werte ein, so gibt es zu jedem solchen r ein nur von r abhängiges $\delta(r)$ mit $0 < \delta(r) < 1$, so daß für alle Punkte c in S_r im Abstande $R = \varrho\sigma < r$ von w_1

$$(4,13)\quad \frac{1-|\varphi(c)|}{|1-\varphi(c)|} \geqq (1-\delta(r))\cos\psi, \qquad 0<\delta(r)<1, \qquad \lim_{r\downarrow 0}\delta(r) = 0,$$

gilt.

Somit gibt es also ein nur von η und r abhängiges $q_1 > 0$, so daß für alle w auf C mit $w-w_1 \leqq q_1$ und die ihnen zugeordneten Punkte c in S_r im Abstande R von w_1 nach (4, 11), (4, 12), (4, 13)

$$\frac{\Delta' C}{\Delta_w} \geqq \frac{(1-\omega')(1-\delta(r))(1-\varepsilon_1(\eta))}{\varkappa}\,\frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)}\,\frac{|\varphi(w_1)-\varphi(c)|}{|w_1-c|}\cos^2\psi$$

ist. Hiermit ist die Relation (4, 1) mit $K_1 = \frac{(1-\omega')(1-\delta)(1-\varepsilon_1)}{\varkappa}\,\frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)}$ — für den Fall $\tau = 1$ — bewiesen. Die Konstante K_1 hängt noch von η und r ab. Da nun aber wegen $r \leqq \eta$ mit $\eta \downarrow 0$ auch sicher $r \to 0$ konvergiert, so strebt K_1 mit $\eta \downarrow 0$ gegen $\frac{1}{\varkappa}$. Hieraus ergibt sich auch die Richtigkeit der zweiten Behauptung des Satzes 1 über die Konstante K_1. Damit ist der Satz 1 für den Fall $\tau = 1$ bewiesen. —

[33]) Vgl. C. Carathéodory, Schwarz-Festschrift, S. 40–41 und E. Lindelöf, Compte rendu du 4ième congrès des mathématiciens scandinaves, Stockholm 1916, S. 87.

24. Es sei allgemeiner τ beliebig, $0 < \tau \leqq 2$. Man kann diesen Fall folgendermaßen auf den Fall $\tau = 1$ zurückführen.

Durch die Transformation $u = (w - w_1)^{1/\tau}$ geht C in eine geschlossene Kurve Γ in der u-Ebene über, die in dem $w = w_1$ entsprechenden Punkte $u = 0$ eine Tangente besitzt. Γ braucht aber nicht notwendig (in der schlichten Ebene) doppelpunktfrei zu sein. Wählt man aber auf C einen P als inneren Punkt enthaltenden passenden Bogen C' und ergänzt man diesen geeignet durch einen bis auf die Endpunkte innerhalb von C verlaufenden Jordanbogen zu einer geschlossenen Jordankurve C_1, so ist das Bild Γ_1 von C_1 bei dieser Transformation eine in der u-Ebene doppelpunktfreie geschlossene Jordankurve, die in $u = 0$ eine Tangente hat. Der Winkelraum W (der Öffnung 2ψ) geht dabei in einen von zwei von $u = 0$ ausgehenden symmetrisch zur Innennormalen von Γ_1 in $u = 0$ verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraum W' der Öffnung $2\frac{\psi}{\tau}$ über. Bezeichnet man die Abbildungsfunktion des Innern von Γ_1 auf $|z| < 1$ mit $z = \psi_1(u)$, die des Inneren G_1 von C_1 auf $|z| < 1$ mit $z = \varphi_1(w)$, so ist

$$\left| \frac{\psi_1(u) - \psi_1(0)}{u} \right| = \left| \frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} \right| .$$

Berücksichtigt man nun ferner die am Schlusse von Nr. 14 gemachte Bemerkung über das Verhalten der Unbewalltheitsfunktion gegenüber der obigen Transformation, so sieht man, daß es auch für $\varphi_1(w)$ zu jedem ω mit $0 < \omega < 1$ ein $q_1' > 0$ und zu jedem $w \neq w_1$ auf C mit $|w - w_1| \leqq q_1'$ ein $R' > 0$ gibt, so daß für alle c in W und G mit $|c - w_1| = R'$

$$(4,14) \qquad \left| \frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} \right| \geqq \frac{1 - \omega}{\varkappa^{1/\tau}} \left| \frac{\varphi_1(c) - \varphi_1(w_1)}{(c - w_1)^{1/\tau}} \right| \cos^2\left(\frac{\psi}{\tau}\right)$$

gilt. Ist nun $\varphi(w)$ die Abbildungsfunktion des Innern von C auf $z < 1$, so konvergieren nach dem Hilfssatz 4 die Quotienten

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(c) - \varphi_1(w_1)}{\varphi_1(c) - \varphi_1(w_1)}$$

mit $w \to w_1$ bzw. $c \to w_1$ gegen ein und dieselbe von 0 verschiedene Zahl. Daher darf man in (4,14) $(\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1))$ durch $(\varphi(w) - \varphi(w_1))$ und gleichzeitig $(\varphi_1(c) - \varphi_1(w_1))$ durch $(\varphi(c) - \varphi(w_1))$ ersetzen, wenn man q_1' eventuell noch hinreichend verkleinert. — Damit ist der Satz 1 in allen Teilen bewiesen. —

25. Anmerkung. Für eine spätere Anwendung (Satz 6) ist es nützlich, über die im Satz 1 genannte Zahl R noch eine etwas genauere Angabe als dort zu machen. Aus der Relation (4, 3) folgt, daß der Quotient $\left|\frac{w - w_1}{R}\right|$ zwischen zwei von η und r abhängigen positiven Schranken liegt,

die aber gegen 0 konvergieren, wenn man $\eta \downarrow 0$ konvergieren läßt. Da nach der Transformation $u = (w - w_1)^\alpha$ der Quotient $\left|\frac{w - w_1}{R}\right|$ in $\left|\frac{w - w_1}{R}\right|^\alpha$ übergeht, so bleibt die analoge Behauptung über den entsprechenden Quotienten auch für den Fall einer beliebigen Ecke der Öffnung $\pi\tau$ richtig. Wir heben diese Tatsache besonders hervor: *Es sei* ω *mit* $0 < \omega < 1$ *fest vorgegeben, und es sei* q_1 *die nach Satz* 1 *zu* $K_1 = \frac{1-\omega}{\varkappa^{1/\tau}}$ *zugeordnete Konstante, so daß für alle* $w \neq w_1$ *auf* C *mit* $|w - w_1| \leqq q_1$ *und die zugeordneten Punkte* c *in* W *und* G *mit* $|c - w_1| = R$ *die Ungleichung* (4, 1) *gilt. Dann wird nach dem bei unserem Beweise angegebenen Verfahren* R *zu* w *derart zugeordnet, daß der Quotient* $\frac{|w - w_1|}{R}$ *zwischen zwei positiven Schranken* μ_1, μ_2 *bleibt:*

$$0 < \mu_1 \leqq \frac{|w - w_1|}{R} \leqq \mu_2.$$

Die so erhaltenen Konstanten μ_1 *und* μ_2 *konvergieren aber gegen* 0, *wenn man* $\omega \to 0$, *d. h. die Konstante* $K_1 \to \frac{1}{\varkappa^{1/\tau}}$ *und somit auch* $q_1 \to 0$ *gehen läßt.*

26. Wir leiten nunmehr eine der Ungleichung (4, 1) des Satzes 1 analoge Abschätzung für den Differenzenquotienten nach oben ab.

Satz 2. *Unter denselben Voraussetzungen wie im Satze* 1 *gibt es zwei positive Konstanten* K_2 *und* q_2, *sowie zu jedem* $w \neq w_1$ *auf* C *mit* $|w - w_1| \leqq q_2$ *ein* $R > 0$, *so daß für alle Punkte* c' *in* W *und* G *im Abstande* R *von* w_1

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \leqq K_2 \frac{|\varphi(c') - \varphi(w_1)|}{|c' - w_1|^{1/\tau}} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\psi}{\tau}\right)} \tag{4,15}$$

gilt.

Ist $\varkappa = \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$, *so kann man* $K_2 = (1 + \omega)\varkappa^{1/\tau}$ *setzen, wo* ω *beliebig klein gemacht werden kann, wenn nur* q_2 *hinreichend klein angenommen wird. Es ist* $R \leqq \left(\frac{3}{2}\pi^2\right)^\tau \varkappa |w - w_1|^{5/6}$.

Beweis. Es sei wieder $\varphi(w_1) = 1$ und zunächst $\tau = 1$. Es sei C^* einer der beiden in P zusammenstoßenden Kurvenzweige von C. Wie beim Beweise des Satzes 1 können wir die Tangente in P zwischen zwei durch P hindurchgehende Geraden g_1 und g_2 einschließen, die mit dieser einen Winkel der Öffnung η bilden, $0 < \eta < \frac{\pi}{16}$, $\sqrt{\eta} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \nu_0$. Dann beschreiben wir um P den Kreis $\mathfrak{K}$ mit so kleinem Radius $r \leqq \eta$, daß alle innerhalb und auf $\mathfrak{K}$ gelegenen Punkte von C in einen der beiden von g_1 und g_2 gebildeten (Scheitel-) Winkelräume W_1 oder W_2 der Öffnung 2η hinein-

fallen, und daß ferner mit jedem Punkte Q von C im Innern von $\mathfrak{K}$ oder auf $\mathfrak{K}$ auch einer der Bögen $\overset{\frown}{PQ}$ von C (bis auf P) sich im Innern eines der Winkelräume befindet. Darüber hinaus sei r so klein, daß $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} < \frac{3}{2}\varkappa$ für $\varepsilon \leqq r$ ist. Dann liegt, wie leicht zu sehen ist, auch der durch $\mathfrak{K}$ aus dem Winkelraum W herausgeschnittene Sektor S_r ganz innerhalb von G.

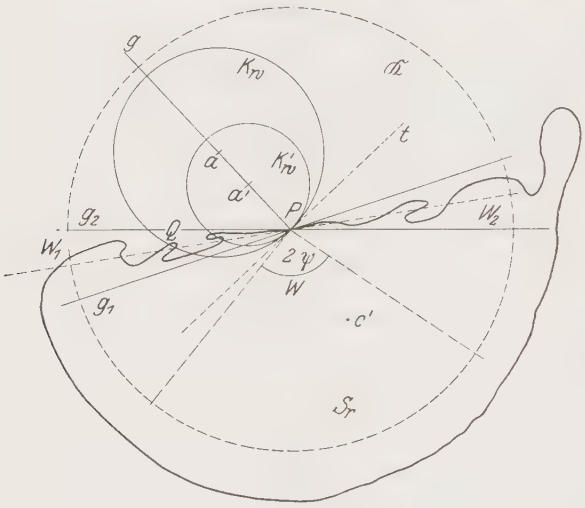

Fig. 13.

Dann ziehen wir von P aus unter dem Winkel $\eta_1 = \sqrt{\eta} > \eta$ gegen die äußere Normale in P auf derselben Seite der Normalen wie der oben genannte Zweig C^* von C einen Strahl g, der mit einem an P anstoßenden Stück außerhalb von C verläuft. Für alle hinreichend nahe bei P gelegenen Punkte w von C^* können wir einen durch P und w hindurchgehenden Kreis k'_w finden, dessen Mittelpunkt a' auf g liegt, dessen Radius $\varrho' = \overline{a'w}$ ist, und der ganz innerhalb von $\mathfrak{K}$ liegt. Sämtliche Schnittpunkte von k'_w mit C liegen dann auf derselben Seite der Normalen in P wie der Strahl g und alle innerhalb eines der beiden Winkelräume W_1, W_2, etwa von W_1. W_1 enthält also ein an P anstoßendes Stück von C^*. - Zwischen dem Punkte w und dem Radius von k'_w besteht die Relation

$$\varrho' = \frac{w - w_1}{2\sin(\eta - \mu)}, \qquad -\eta \leqq \mu \leqq \eta,$$

wo μ der Winkel ist, den die von w nach w_1 gezogene Sehne von C mit der Tangente an C in w_1 bildet (μ werde dabei positiv gerechnet, wenn w auf derselben Seite der Tangente liegt wie die Außennormale von C in w_1). Für die im Satze genannte Zahl R wird sich später ganz ähnlich wie beim Satze 1 der Wert

$$R = \frac{1}{1-\varepsilon}\,\eta^{1/3}\frac{|w - w_1|}{2\sin(\sqrt{\eta} + \mu)}\varkappa, \qquad 0 < \varepsilon < 1, \tag{4,16}$$

ergeben, wo ε mit $\eta \downarrow 0$ gleichfalls gegen 0 geht.

27. Es werde nun $\varrho > \varrho'$ durch die Relation

$$\varrho = \varkappa\,\varrho'\,\frac{1}{1-\omega'}\,\frac{\sin(\eta_1 + \eta)}{\sin(\eta_1 - \eta)} \tag{4,17}$$

bestimmt, wo $0 < \omega' \leqq \frac{1}{2}$ und $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \leqq \varkappa(1+\omega')$ für alle $\varepsilon \leqq r$ und $\lim_{r \to 0} \omega' = 0$ ist. Dann gilt auch offenbar

$$(4,18) \qquad \varkappa(1+\omega') < \frac{2\varrho \sin(\eta_1 - \eta)}{2\varrho' \sin(\eta_1 + \eta)} = \varkappa \frac{1}{1-\omega'}.$$

Wir markieren den Punkt a auf g im Abstande ϱ von P und beschreiben um a den Kreis k_w durch P mit dem Radius ϱ. Dieser Kreis brauchte nun zunächst nicht mehr ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ zu liegen; da aber die Relation (4, 17) nur das Verhältnis von $\frac{\varrho}{\varrho'}$ festlegt, können wir w in einer solchen Nähe von P annehmen und somit ϱ' derart verkleinern, daß ϱ beliebig klein ist und daher der Kreis k_w innerhalb von $\mathfrak{R}$ zu liegen kommt. Wir denken uns w so nahe an w_1 gewählt. Der Zähler in (4, 18) ist gleich der Länge d der kürzesten von P ausgehenden und im Winkelraum W_1 verlaufenden Sehne von k_w, der Nenner gleich der Länge d' der längsten derartigen Sehne von k'_w. Es sei B ein Kurvenbogen von C, der von zwei von P verschiedenen Schnittpunkten von k'_w mit C begrenzt ist und sonst außerhalb von k'_w verläuft, falls es einen solchen Bogen gibt. Da der im Winkelraum W_1 gelegene Kreisbogen von k'_w innerhalb des Kreises mit dem Radius d' um P liegt, kann wegen der Voraussetzung $\Delta(\varepsilon) \leqq \varkappa(1+\omega') \cdot \varepsilon$ und wegen (4, 18) B nicht in das Äußere des Kreises mit dem Radius $d'\varkappa(1-\omega') < d$ eindringen. Weil ferner der innerhalb des Winkelraumes W_1 liegende Kreisbogen von k_w *außerhalb* des Kreises mit dem Radius d um P liegt, kann B den Kreis k_w nicht mehr treffen. *Wenn man also C von P aus in den Winkelraum W_1 hinein durchläuft, so werden sämtliche Schnittpunkte von k_w mit C hinter dem Punkte w angetroffen.* — Ferner gilt auch für die Länge der längsten von P ausgehenden Sehne d_1 von k_w in W_1 $(= 2\varrho \sin(\eta + \eta_1))$ und die der kürzesten derartigen Sehne d'_1 von k'_w $(= 2\varrho' \sin(\eta_1 - \eta))$ die Relation

$$(4,19) \qquad \frac{d_1}{d'_1} = \frac{2\varrho \sin(\eta_1 + \eta)}{2\varrho' \sin(\eta_1 - \eta)} = \frac{\varkappa}{1-\omega'} \frac{\sin^2(\eta_1 + \eta)}{\sin^2(\eta_1 - \eta)}.$$

28. Für das Folgende bemerken wir noch, daß die Länge des kleineren der von g_2 abgeschnittenen Kreisbögen von k_w gleich $2\varrho(\eta_1 + \eta)$ ist. Dabei ist der in das Äußere von C eindringende Schenkel von W_1 gerade eine Halbgerade von g_2. Da jeder Schnittpunkt des Kreises k_w mit C innerhalb des Winkelraumes W_1 liegt, ist die Länge eines jeden kleineren Kreisbogens von k_w von P bis zu einem solchen Schnittpunkt mit C höchstens gleich $2\varrho(\eta_1 + \eta)$. Ferner liegt mit jedem Punkte Q von C innerhalb von k_w oder auf k_w auch einer der Bögen $\overset{\frown}{PQ}$ von C (bis auf P) im Innern des Winkelraumes W_1, da ja k_w im Innern von $\mathfrak{R}$ liegt (vgl. Nr. 26).

Damit haben wir unsere Annahme über die Unbewalltheitsfunktion, soweit sie für den Beweis in Betracht kommt, vollständig ausgenützt. —

29. Es sei nun Q der erste Schnittpunkt von k_w mit C, den man beim Durchlaufen von C von P aus in das Äußere von k_w hinein antrifft. Wir bezeichnen den hierbei durchlaufenen Kurvenbogen $\overset{\frown}{PQ}$ mit α. Der zu ihm komplementäre Bogen auf C sei β. γ sei der Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$ von k_w, der bei P in das Innere von C eindringt. Der Teilbogen $\overset{\frown}{w w_1}$ von β werde mit $\bar{\beta}$ bezeichnet. Wir wählen nun die in der Formulierung des Satzes angegebene Größe $R = \sigma\varrho$, wo $\sigma = \eta^{1/3}$ gesetzt sei, und nehmen in S_r einen Punkt c' im Abstande R von P an (es ist $R = \sigma\varrho < \varrho < r$). Nach (4, 17) hat also R in der Tat den in (4, 16) angegebenen Wert. Offenbar ist

$$R = \frac{|w - w_1|}{2\sin(\sqrt{\eta} + \mu)} \frac{\varkappa \eta^{\frac{1}{3}}}{1 - \omega'} \frac{\sin(\sqrt{\eta} + \eta)}{\sin(\sqrt{\eta} - \eta)} \leqq \frac{|w - w_1|}{2\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\eta}{2}}} \frac{\varkappa \eta^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}\sqrt{\eta}}{\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\eta}}$$

und wegen $\eta \geqq r \geqq |w - w_1|$

$$R \leqq \frac{3}{2}\pi^2 \varkappa \; |w - w_1|^{\frac{1}{6}}.$$

30. Der Kreisbogen $\gamma = \overset{\frown}{PQ}$ bildet mit dem Bogen α von C offenbar eine geschlossene Jordankurve Γ. Γ enthält den Punkt c' im Innern. Dies folgt wieder aus dem Hilfssatz 3 in Nr. 5, wenn man folgendes beachtet: Der Kurvenbogen $\overset{\frown}{PQ} = \beta$ liegt nach dem oben Gesagten ganz innerhalb des Winkelraumes W_1. Da die Tangente t von k_w in P sicher außerhalb von W_1 und W_2 verläuft, trifft der Bogen $\beta = \overset{\frown}{PQ}$ diese Tangente t nur in P. Da aber auch der Kreisbogen $\gamma = \overset{\frown}{PQ}$ mit t nur den Punkt P gemeinsam hat, und also die beiden Bögen β und γ von P ausgehen und den gemeinsamen Endpunkt Q ($\neq P$) haben, so liegen sie beide auf derselben Seite von t, und zwar auf derselben Seite wie der Strahl g und die *Außennormale* von C in P. Der Sektor S_{r_1}, der wegen ($\eta_1 < r_0$) t nicht enthält, liegt ganz auf derselben Seite von t wie die *Innennormale* von C in P, also auf der *entgegengesetzten*. Auf dieser Seite befindet sich somit auch c', so daß in der Tat der Hilfssatz 3 anwendbar ist. Die Kurve C und der Kreis $k = k_w$ stellen dann offenbar eine Konfiguration dar, die den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 genügt, wenn für die dort genannten Bögen $\alpha, \beta, \bar{\beta}, \gamma$ und die geschlossene Jordankurve Γ, sowie den genannten Punkt c' gerade die hier mit denselben Buchstaben bezeichneten Gebilde gewählt werden. Daher gilt ($m_{C,c'}\bar{\beta} = \Delta_C''$ gesetzt)

$$\Delta_C'' \equiv m_{C,c'}\bar{\beta} \leqq m_{k_w,c'}\gamma.$$

31. Nach Hilfssatz 7 ist mit $\alpha_k' = m_{k_n, c'}\gamma$ und $\Psi = \psi_1 + \eta_1 \leqq \psi + \eta_1 < \frac{\pi}{2}$, wo ψ_1 der Winkel zwischen $\overline{c' w_1}$ und der Innennormalen von C in w_1 ist,

$$(4,20) \qquad \Delta_C'' \leqq m_{k_n, c'}\gamma \leqq \frac{(2+\sigma)^2}{2\sigma\cos(\psi_1+\eta_1)}\frac{\gamma}{\varrho} = A_1\frac{\gamma}{\varrho}.$$

Dabei ist die Länge von γ gleichfalls mit γ bezeichnet.

Da $\psi + \eta_1 < \frac{\pi}{2}$ und $\sigma = \eta^{1/3}$ gesetzt ist, kann man den Ausdruck A_1 gleichmäßig für $0 \leqq \psi_1 \leqq \psi$ so abschätzen

$$A_1 = \frac{1}{\sigma}\frac{(2+\sigma)^2}{2\cos(\psi_1+\eta_1)} \leqq \frac{1}{\sigma}\frac{2}{\cos\psi_1}(1 + h(\eta)),$$

wo $h(\eta)$ nur von η abhängt und mit $\eta \to 0$ selber gegen 0 geht. Somit erhalten wir aus (4, 20)

$$(4,21) \qquad \Delta_C'' \leqq \frac{2}{\sigma\cos\psi_1}(1 + h(\eta))\frac{\gamma}{\varrho}.$$

32. Hier wollen wir nun $\Delta_C'' = m_{C, c'}\bar{\beta}$ durch $\Delta_C' = m_{C, w_0}\bar{\beta}$ ersetzen und schätzen zu diesem Zwecke den Quotienten $\frac{\Delta_C'}{\Delta_C''}$ nach oben nach dem Hilfssatze 9 ab. Für die Anwendung dieses Hilfssatzes und auch für die weiter unten folgenden Abschätzungen müssen wir die oben eingeführten und auf hinreichend kleinen Werte beschränkten Zahlen η und r noch weiter einschränken. Wir bezeichnen den weiter unten zu benutzenden Ausdruck $4A_1\sqrt{\eta}$ mit δ und nehmen η so klein an, daß

$$(4,22) \quad \delta = 4A_1\sqrt{\eta} \leqq \frac{(2+\eta^{1/3})^2}{2\eta^{1/3}\cos(\psi+\sqrt{\eta})}4\sqrt{\eta} = \frac{4(2+\eta^{1/3})^2\eta^{1/6}}{2\cos(\psi+\sqrt{\eta})} < \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$$

ist. Wegen der Winkeltreue der durch $z = \varphi(w)$ vermittelten Abbildung in $w = w_1$ folgt[34]), daß das Bild des oben genannten Sektors S_r in der z-Ebene innerhalb des Bereiches

$$(4,23) \quad |z-1| \leqq l(r), \quad \pi - (\psi + l'(r)) \leqq \arg(z-1) \leqq \pi + (\psi + l'(r))$$

liegt, wo $l(r)$ und $l'(r)$ positiv sind, nur von r abhängen und mit $r \to 0$ selber gegen 0 konvergieren. Wir wählen nun r so klein, daß $l'(r) < \nu_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ und $l(r) < \sin\frac{\nu_0}{2}$ ist. (Dann liegt, wie leicht zu sehen ist, der Sektor (4, 23) (bis auf den Punkt $z = 1$) ganz im Innern des Einheitskreises.)

33. Unter diesen Annahmen sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 9 für $\alpha' = \Delta_C'$, $\alpha'' = \Delta_C''$, $c = c'$,

$$\tau_1 = \psi + l'(r) < \psi + \nu_0 < \frac{\pi}{2}$$

[34]) Vgl. die in der Fußnote [33]) zitierten Abhandlungen.

sicher erfüllt. Man beachte noch, daß, wie in Nr. 28 gesagt, der Bogen $\gamma \leqq 2\varrho(\eta + \sqrt{\eta})$ ist, so daß für den Bogen $\Delta_C'' = m_{C,c'}\beta$ sicher wegen (4, 22) die Ungleichung gilt

$$\Delta_C'' \leqq A_1 \frac{\gamma}{\varrho} \leqq A_1 2(\sqrt{\eta} + \eta) \leqq 4\sqrt{\eta}\, A_1 = \delta < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tau_1\right).$$

Schließlich gilt für $\chi = |\arc \varphi(c')|$ wegen $l(r) \leqq \sin\frac{\nu_0}{2}$

$$\sin\chi \leqq l(r) \leqq \sin\frac{\nu_0}{2}, \qquad \chi \leqq \frac{\nu_0}{2} \quad \text{und} \quad \chi \leqq \frac{\pi}{2} l(r).$$

Daher gilt für jedes nach der obigen Konstruktionsvorschrift in $\mathfrak{N}$ wählbare w nach dem Hilfssatz 9

$$\Delta_C' \leqq \frac{1 - |b|}{2|b|\cos^2\left(\psi + l'(r) + \frac{\delta + \chi}{2}\right)} \Delta_C'', \qquad b = \varphi(c'), \tag{4, 24}$$

wo

$$l'(r) + \frac{\delta + \chi}{2} \leqq \nu_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_0}{2} + \frac{\nu_0}{2}\right) = \frac{3}{2}\nu_0 = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) < \frac{\pi}{2} - \psi$$

ist. Da $\chi \leqq \frac{\pi}{2} l(r)$ ist und $\delta \to 0$ mit $\eta \to 0$ geht und $||b| - 1| \leqq l(r)$ ist, können wir (4, 24) weiter abschätzen

$$\Delta_C' \leqq \frac{1 - |b|}{2\cos^2\psi} \Delta_C''(1 + h_1(\eta))(1 + \delta_1(r)), \tag{4, 25}$$

wo $h_1(\eta)$, $\delta_1(r)$ nur von η bzw. r abhängen und mit $\eta \to 0$ bzw. $r \to 0$ gleichfalls gegen 0 gehen.

34. Nun beachte man, daß der Bogen $\widehat{PQ} = \gamma$ die Länge $2\varrho(\mu' + \sqrt{\eta})$ hat, wo μ' der mit Vorzeichen genommene Winkel ist, den die Sehne $\overline{PQ}$ mit der Tangente in P bildet. Daher ist (wegen $|\mu'| \leqq \eta$), unter d_w die Länge der Sehne $\overline{PQ}$ verstanden,

$$\frac{\gamma}{d_w} = \frac{2\varrho(\mu' + \sqrt{\eta})}{2\varrho\sin(\mu' + \sqrt{\eta})} \leqq 1 + h_2(\eta), \tag{4, 26}$$

wo $h_2(\eta)$ nur von η abhängt und mit $\eta \downarrow 0$ gleichfalls gegen 0 geht. Ferner gilt nach (4, 19) zwischen der Länge D_w der Sehne $\overline{w}\,\overline{w}_1$ und der Sehne $\overline{PQ}$ die Relation

$$\frac{D_w}{d_w} \geqq \frac{(1 - \omega')}{\varkappa} \frac{\sin^2(\eta_1 - \eta)}{\sin^2(\eta_1 + \eta)}. \tag{4, 27}$$

Schließlich beachte man, daß wegen der obigen Annahme ((4, 23)) über r

$$\frac{1 - |\varphi(c')|}{|1 - \varphi(c')|} \leqq (1 + \delta_2(r))\cos\psi_1 \tag{4, 28}$$

ist, wo $\delta_2(r)$ nur von r abhängt und mit $r \to 0$ gegen 0 geht.

Somit gibt es ein nur von η und r abhängiges $q_2 > 0$, so daß für alle w auf C mit $|w - w_1| \leqq q_2$ und die zugeordneten Punkte c' in G und W im Abstande R von w_1 wegen (4, 25), (4, 21), (4, 26), (4, 27), (4, 28)

$$\frac{\Delta'_c}{D_w} \leqq \left| \frac{\varphi(c') - \varphi(w_1)}{c' - w_1} \right| \frac{(1+h(\eta))(1+h_1(\eta))(1+h_2(\eta))(1+\delta_1(r))(1+\delta_2(r))}{\cos^2\psi}$$

$$\times \frac{\sin^2(\eta_1 + \eta)}{\sin^2(\eta_1 - \eta)} \frac{\varkappa}{1-\omega'}$$

gilt. Hiermit ist die Relation (4, 15) — für den Fall $\tau = 1$ — mit

$$K_2 = \frac{\varkappa(1+h(\eta))(1+h_1(\eta))(1+h_2(\eta))(1+\delta_1(r))(1+\delta_2(r))}{(1-\omega')} \frac{\sin^2(\eta_1+\eta)}{\sin^2(\eta_1-\eta)}$$

bewiesen. K_2 hängt noch von η und r ab. Da wegen $r \leqq \eta$ mit $\eta \to 0$ auch $r \to 0$ strebt, so konvergiert $K_2 \to \varkappa$ mit $\eta \downarrow 0$. Hieraus folgt die zweite Behauptung des Satzes 2 über die Konstante K_2 — für den Fall $\tau = 1$.

Der Fall $\tau \neq 1$ kann durch wörtlich dieselben Überlegungen wie beim Satze 1 (Nr. 24) auf den Fall $\tau = 1$ zurückgeführt werden.

Auch hier gilt eine ganz analoge Bemerkung über den Quotienten $\frac{w - w_1}{R}$ wie beim Satze 1 (Nr. 25).

35. Wir formulieren noch das folgende, sich unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2 ergebende

Korrolar. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte $w = w_1$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, besitzt und die in w_1 linear unbewallt ist (d. h. ihre Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ in w_1 genügt der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$). $w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ so auf das Innere G von C ab, daß $z = 0$ in $w = w_0$ (w_0 in G), $z = 1$ in $w = w_1$ übergeht. Es sei L eine in $z = 1$ mündende Jordankurve, die bis auf den Endpunkt $z = 1$ ganz in $|z| < 1$, und zwar innerhalb eines von zwei symmetrisch zum Radius in $z = 1$ verlaufenden Kreissehnen gebildeten Winkelraumes der Öffnung 2ψ, $0 \leqq \psi < \frac{\pi}{2}$, liegt. Dann gibt es zwei positive Konstanten M_1 und M_2 und ein zugehöriges $q' > 0$, sowie zu jedem $z \neq 1$ mit $|z| = 1$, $|z - 1| \leqq q'$ ein geeignetes $b(z)$ und ein $b'(z)$, auf L, die mit z gegen 1 gleichfalls gegen 1 konvergieren, so daß*

$$\left| \frac{f(z) - f(1)}{(z-1)^\tau} \right| \leqq M_1 \left| \frac{f(b) - f(1)}{(b-1)^\tau} \right|$$

und

$$\left| \frac{f(z) - f(1)}{(z-1)^\tau} \right| \geqq M_2 \left| \frac{f(b') - f(1)}{(b'-1)^\tau} \right|$$

gilt.

Dabei kann man auch

$$M_1 = (1+\omega)\varkappa \cos^{-2\tau}\left(\frac{\psi'}{\tau}\right) \quad \text{und} \quad M_2 = (1-\omega') \frac{\cos^{2\tau}\left(\frac{\psi}{\tau}\right)}{\varkappa}$$

wählen, wo $0 < \omega$, $\omega' < 1$ *ist,* $\varkappa = \overline{\lim_{\varepsilon \searrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ *ist und* ω, ω' *beliebig klein gemacht werden können, wenn man* q' *hinreichend klein annimmt.*

Zum Beweise hat man nur zu beachten, daß das Bild von L in der w-Ebene ein in $w = w_1$ mündender Jordanbogen L' ist, der wegen der Quasikonformität der Abbildung schließlich innerhalb eines von zwei von w_1 ausgehenden symmetrisch zur Innennormalen in w_1 verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraumes der Öffnung $\psi\tau + \delta$, bleibt, wo $\psi\tau - \delta < \frac{\pi}{2}\tau$ ist. Dann ergibt sich der Beweis durch Anwendung der Sätze 1 und 2 auf die von $f(z)$ inverse Funktion $z = \varphi(w)$, indem wir die Punkte c und c' jeweils auf L' annehmen und $b = \varphi(c)$, $b' = \varphi(c')$ wählen.

§ 5.

Folgerungen aus den Sätzen 1 und 2.

36. Wir beweisen zunächst eine Folgerung aus den Sätzen 1 und 2, die sich auf die Existenz der *allseitig* genommenen Ableitung bezieht.

Satz 3. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte P: $w = w_1$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, besitzen möge; $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von C auf $|z| < 1$ ab. Es sei L ein in $w = w_1$ mündender, sonst innerhalb von C verlaufender Jordanbogen, und zwar möge L innerhalb eines Winkelraumes liegen, der von zwei von w_1 ausgehenden, zuerst im Innern von C verlaufenden und symmetrisch zur Winkelhalbierenden des Eckenwinkels bei w_1 liegenden Strahlen gebildet wird. Ferner möge bei der Annäherung längs L*

$$\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} = \gamma \quad [35])$$

existieren und von 0 und ∞ verschieden sein.

Hinreichend und notwendig dafür, daß auch auf C und daher (wie wir zeigen werden) allseitig

$$\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} \tag{5,1}$$

existiert und gleich γ ist, ist, daß C in P regulär unbewallt ist.

37. Wir schicken dem Beweise den folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz 10. *Es sei Γ eine geschlossene Jordankurve, $f(z)$ eine im Innern G von Γ reguläre und auf $G + \Gamma$ stetige Funktion. Es sei z_1 ein*

[35]) Wir denken uns die Potenz $(w - w_1)^{1/\tau}$ etwa für einen Wert w auf der Winkelhalbierenden des Eckenwinkels bei w_1 im Innern von C irgendwie normiert. Dann bleibt diese Potenz im Innern von C und auf C eindeutig und stetig.

Punkt auf Γ. Gilt für beliebige z auf Γ

$$\frac{|f(z)-f(z_1)|}{|z-z_1|^{\alpha}} \leqq \Omega, \qquad \alpha > 0,$$

so gilt dies gleichmäßig auch für alle z im Innern von Γ.

Beweis. Wir bilden G mittels $z = g(\zeta)$ auf $|\zeta| < 1$ so ab, daß etwa $\zeta = 1$ in $z = z_1$ übergeht. Dann zeigen wir, daß, $f^*(\zeta) = f(g(\zeta))$ gesetzt, $h(\zeta) = \frac{f^*(\zeta)-f^*(1)}{(g(\zeta)-g(1))^{\alpha}}$ [36]) durch das Poissonsche Integral — mit den Randwerten $h(e^{i\vartheta})$ — darstellbar ist, und leiten aus dieser Darstellung dann in üblicher Weise die behauptete Ungleichung ab.

38. Um nun einzusehen, daß man $h(\zeta)$ durch das Poissonsche Integral darstellen kann, braucht man nur die folgende Tatsache zu beachten:

Ist $\psi(z)$ in $|z| < 1$ regulär und besitzt $\psi(z)$ integrable radiale Randwerte $\psi(e^{i\vartheta})$ außer auf einer ϑ-Menge vom Maße 0, ist ferner

$$(5,2) \qquad \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\psi(r e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq C, \qquad 0 \leqq r < 1 \quad [37]),$$

so ist $\psi(z)$ durch das Poissonsche Integral, $z = r e^{i\varphi}$, $r < 1$,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\vartheta}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\vartheta})\, K(r, \vartheta-\varphi)\, d\vartheta$$

gegeben.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich sofort aus einem Satze von Herrn Ostrowski [38]), der besagt, daß eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $\psi(z)$

---

[36]) Wir denken uns die Potenz in $h(\zeta)$ für einen Wert $|\zeta| < 1$ in bestimmter Weise normiert. Dann bleibt $h(\zeta)$ wegen $g(\zeta) \neq g(1)$ in $|\zeta| < 1$ eindeutig und regulär und hat für $|\zeta| \to 1$, $\arc \zeta \neq \arc 1$ eindeutige, beschränkte und integrable Randwerte.

[37]) Dabei ist für $a \geqq 0$ $\overset{+}{\lg} a = \lg a$, wenn $a \geqq 1$, und $= 0$, wenn $a \leqq 1$ ist.

[38]) A. Ostrowski, Acta litterarum ac scientiarum Reg. Univ. Hung. Francisco Josph. T. I, Fasc. II, p. 87, Fußnote. Dort ist der Satz folgendermaßen formuliert: *Ist $F(z)$ in $|z| < 1$ regulär, hat $F(z)$ auf einer ϑ-Menge positiven Maßes ($z = r e^{i\vartheta}$) die Randwerte 0 und ist* $\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F(r e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq C_1$, $0 < r < 1$, *so ist* $F(z) \equiv 0$. Um einzusehen, daß die obige Fassung mit dieser äquivalent ist, hat man nur zu beachten, daß, wenn zwei in $|z| < 1$ reguläre Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ fast überall die gleichen radialen Randwerte haben und den Bedingungen genügen

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F_1(r e^{i\vartheta})|\, d\vartheta = C_1, \qquad \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F_2(r e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq C_1,$$

$F = F_1 - F_2$ fast überall die Randwerte 0 besitzt und daß ferner

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F_1 - F_2|\, d\vartheta \leqq \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F_1|\, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F_2|\, d\vartheta + \lg 2 \leqq 2C_1 + \lg 2$$

gilt.

durch die Angabe ihrer Randwerte auf einer Menge positiven Maßes eindeutig bestimmt ist, wenn (5, 2) gilt. Da nämlich nach Fatou

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\vartheta})\, K(r, \vartheta - \varphi)\, d\vartheta$$

für fast alle ϑ die Randwerte $\psi(e^{i\vartheta})$ besitzt und da ferner

$$\int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta$$

gleichmäßig in r beschränkt[39]) und somit auch

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\Psi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq C_1$$

für alle $0 \leqq r < 1$ bleibt, sind $\psi(z)$ und $\Psi(z)$ miteinander identisch.

Für $h(\zeta)$ ist nun diese Voraussetzung erfüllt. Denn wegen der Beschränktheit von $|f(z) - f(z_1)|$ und $|g(\zeta) - g(1)|$ für $|\zeta| \leqq 1$ bleibt auch ($\zeta = re^{i\vartheta}$):

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |f(g(\zeta)) - f(g(1))|\, d\vartheta, \qquad \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |g(\zeta) - g(1)|\, d\vartheta$$

für $0 \leqq r < 1$ beschränkt, und dies ist bereits hinreichend dafür[40]), daß

---

[39]) Dies gilt ja sogar für eine allgemeinere Klasse von Funktionen $\Psi(z)$, nämlich für alle $\Psi(z)$, die durch ein Stieltjes-Poissonsches Integral darstellbar sind (siehe A. Ostrowski, die in der Fußnote [38]) ziterte Arbeit. Für die ausführliche Darstellung des Beweises vgl. die in Fußnote [9]) zitierte Abhandlung von Herrn Ostrowski, S. 255 ff. Vgl. auch die Darstellung von G. C. Evans, Logarithmic potential, S. 46.)

[40]) Denn ist $\Phi(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre und beschränkte Funktion, so gilt für $\lg |\Phi(z)|$ bekanntlich die Jensensche Ungleichung ($\Phi(0) \neq 0$, sonst betrachte man $\frac{\Phi(z)}{z^n}$ für passendes ganzes $n > 0$)

$$\lg |\Phi(0)| \leqq \int_0^{2\pi} \lg |\Phi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \qquad (r < 1)$$

oder

$$\lg |\Phi(0)| \leqq \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \lg |\Phi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta,$$

wobei für $a > 0$

$$\overset{+}{\lg} a = \lg a \text{ für } a \geqq 1 \text{ und } = 0 \text{ für } a \leqq 1,$$
$$\overset{-}{\lg} a = \lg a \text{ für } a \leqq 1 \text{ und } = 0 \text{ für } a \geqq 1$$

ist. (Man beachte, daß mit $\lg |\Phi|$ auch $\overset{+}{\lg}\, \Phi$ und $\lg |\Phi|$ integrable Funktionen von ϑ sind.) Da nun $\overset{-}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})| \leqq 0$, $-\overset{-}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})| \geqq 0$ ist, ist

$$\int_0^{2\pi} \left| \overset{-}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})| \right| d\vartheta = -\int_0^{2\pi} \overset{-}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta - \lg |\Phi(0)| \leqq K,$$

(Fortsetzung der Fußnote [40]) auf nächster Seite.)

auch für $0 \leqq r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \left| \lg \frac{|f(z)-f(z_1)|}{|z-z_1|^\alpha} \right| d\vartheta, \qquad z = g(re^{i\vartheta}),$$

beschränkt bleibt.

Es gilt daher

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{i\vartheta}) - f^*(1)}{(g(e^{i\vartheta}) - g(1))^\alpha} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta, \qquad \zeta = re^{i\varphi},$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

39. Beweis von Satz 3. Offenbar genügt es, den Satz für den Fall $\tau = 1$ zu beweisen.

a) Wir zeigen zuerst, daß die Bedingung $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ mit $\varepsilon \to 0$ hinreichend für das Bestehen von (5, 1) ist.

Zunächst folgt aus dem Satze 2, daß die für w in C reguläre und für $w \neq w_1$ auf C stetige Funktion $\Phi(w) = \frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1}$ gleichmäßig für alle w auf C und daher auch nach dem vorausgeschickten Hilfssatz für alle w innerhalb von C beschränkt ist. Daraus ergibt sich auf Grund unserer Voraussetzung nach einem Satze von Lindelöf [41]), daß $\lim_{w \to w_1} \Phi(w) = \gamma = \varphi'(w_1)$ auch gleichmäßig bei Annäherung „im Winkelraum" gilt, also auch insbesondere längs der Normalen in w_1. Daher gilt nach Satz 1 und Satz 2 für hinreichend kleine $|w - w_1|$, $w \neq w_1$,

$$(1-\omega)\left|\frac{\varphi(c)-\varphi(w_1)}{(c-w_1)}\right| \leqq \left|\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1}\right| \leqq (1+\omega)\left|\frac{\varphi(c')-\varphi(w_1)}{c'-w_1}\right|,$$

wo c, c' die dem Punkte w nach Satz 1 und Satz 2 zugeordneten Punkte im Abstande R von w_1 auf der Innennormalen in P sind. Somit gilt für $w \to w_1$

$$|\varphi'(w_1)|(1-\omega) \leqq \overline{\lim_{w \to w_1}} \left|\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1}\right| \leqq |\varphi'(w_1)|(1+\omega).$$

---

und daher auch $(0 < r < 1)$

$$\int_0^{2\pi} \left| \lg |\Phi(re^{i\vartheta})| \right| d\vartheta \leqq \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta - \int_0^{2\pi} \overset{-}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta \leqq \text{konst.}$$

Vgl. für die obige Bedingung für den Mittelwert von $\overset{+}{\lg}$ sowie diese Überlegung die in der Fußnote [9]) zitierte Abhandlung von Herrn Ostrowski S. 261. Die Bedeutung dieser Bedingung für $\overset{+}{\lg}$ besteht darin, daß sie für einen Quotienten zweier analytischer Funktionen erfüllt ist, wenn sie für jede einzeln gilt.

[41]) E. Lindelöf, Sur un principe général de l'analyse, et ses applications à la théorie de la représentation conforme, Acta Soc. scient. Fennicae **46** (1915), Nr. 3, p. 10–11.

Also ist auch mit $\omega \downarrow 0$

$$|\varphi'(w_1)| \leqq \overline{\lim_{w \to w_1}} \left| \frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1} \right| \leqq |\varphi'(w_1)|,$$

und somit folgt, daß $\lim_{w \to w_1} \left| \frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1} \right|$ existiert und $= |\varphi'(w_1)|$ ist. Um nunmehr die Behauptung (5, 1) herzuleiten, beachte man, daß wegen der Existenz der Tangente in $w = w_1$ [42])

$$\lim_{w \to w_1} \arg \frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1} = \arg \varphi'(w_1)$$

ist. Damit ist die Relation $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{(w-w_1)^{1/\tau}} = \gamma$ *für w auf dem Rande* bewiesen. Die allseitige Konvergenz des Ausdrucks (5, 1) folgt dann wegen der Beschränktheit aus einem Hilfssatz von Lindelöf [43]).

b) Zum Beweise des zweiten Teiles des Satzes beachte man die am Schluß von Nr. 17 bewiesene Tatsache. Bezeichnet man die zu $\varphi(w)$ inverse Funktion mit $w = f(z)$ und ist $\varphi(w_1) = 1$, so besagt die Aussage, daß

$$\lim_{\vartheta \to 0} \left| \frac{f(e^{i\vartheta})-f(1)}{\vartheta} \right|$$

existieren und von 0 und ∞ verschieden sein soll (vgl. Nr. 17, Bemerkung 2): ϑ ist ein metrischer Parameter für C in w_1, für den $\frac{r(\vartheta)}{\vartheta} \to \alpha > 0$ für $\vartheta \to 0$ gilt, wobei $r(\vartheta)$ die Länge des oben angeführten, von P_0 $(w = w_1,\ \vartheta = 0)$ nach dem Punkte $P = P(\vartheta)$ gezogenen Radiusvektors ist. Hierfür ist aber nach dem in der Nr. 17 Gesagten *notwendig*, daß $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ ist.

40. Aus dem Satze 1 und 2 sowie aus dem in Nr. 35 formulierten Korrolar und dem Satze 3 ergibt sich nun das folgende

Korrolar. *Es möge $w = f(z)$ den Kreis $|z| < 1$ auf das Innere einer Jordankurve C abbilden, die in $f(1) = w_1$ eine Tangente besitzt und deren Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ der Relation $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt. Bleibt bei Annäherung längs eines in $z = 1$ mündenden, aus dem Innern des Einheitskreises kommenden Jordanbogens L mit stetiger Tangente, welcher die Peripherie des Einheitskreises nicht berührt, $|f'(z)| \leqq M$, so hat $f(z)$ in $z = 1$ nach oben allseitig beschränkten Differenzenquotienten.*

[42]) Vgl. E. Lindelöf, die in der Fußnote [33]) zitierte Abhandlung, S. 85–87.

[43]) Siehe z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 2, S. 21ff. Dieser Satz ist ein Spezialfall des oben zitierten.

Existiert bei Annäherung längs L $\lim_{z\to 1} f'(z) = \gamma$ [44]) *und ist* $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$, *so existiert auch allseitig* $\lim_{z\to 1} \frac{f(z)-f(1)}{z-1}$ *und ist* $= \gamma$.

Beweis. Wegen $|f'(z)| \leqq M$ für z auf L ist

$$|f(z) - f(1)| = \left| \overset{(L)}{\int_z^1} f'(z)\, dz \right| \leqq Ml,$$

wo längs L von z bis 1 zu integrieren ist und l die Länge des Kurvenbogens L von z bis 1 bedeutet. Daher ist

$$\left| \frac{f(z)-f(1)}{z-1} \right| \leqq M \frac{l}{|z-1|},$$

und wegen der Stetigkeit der Tangente von L ist $\lim_{z\to 1} \frac{l}{|z-1|} = 1$, woraus die Beschränktheit dieses Differenzenquotienten bei allseitiger Annäherung aus dem Korrolar zum Satze 1 und 2 und dem Hilfssatz 10 folgt.

Aus $\lim f'(z) = \gamma$ und der eben benutzten Integraldarstellung von $f(z) = f(1) + \int_1^z f'(z)\, dz$, die ja bis in den Punkt $z = 1$ hinein gilt, folgt, daß auch

$$\lim_{z\to 1} \frac{f(z)-f(1)}{z-1} = \gamma \tag{5,3}$$

für z auf L gilt. Denn z bleibt dabei im Stetigkeitsintervall von $f'(z)$. Nach Satz 3 folgt hieraus die Behauptung, falls $\gamma \neq 0$ ist. Ist $\gamma = 0$, so folgt wegen (5,3) die Behauptung direkt aus dem Korrolar zum Satz 1 und 2, Nr. 35 (1. Behauptung).

§ 6.

Heranziehung der Vergleichskurven.

41. Definition. Wir sagen, die geschlossene Jordankurve $\mathfrak{C}$ sei eine *innere* (resp. *äußere*) *Vergleichskurve* der geschlossenen Jordankurve C im Punkte P (oder C besitze in P die innere (resp. äußere) Vergleichskurve $\mathfrak{C}$), wenn $\mathfrak{C}$ den Punkt P mit C gemeinsam hat und nirgends außerhalb von C verläuft (resp. nirgends innerhalb von C liegt und C in ihrem Innern enthält).

Dann gilt der folgende

Satz 4. *Es sei* C *eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte* P $(w = w_1)$ *eine Ecke der Öffnung* $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, *besitzt und die im*

[44]) Hier darf auch $\gamma = 0$ sein.

Punkte P linear unbewallt ist (für deren Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ also in P die Relation $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ gilt). Ferner möge C in P eine innere oder äußere Vergleichskurve $\mathfrak{C}$ besitzen, die in P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau'$ haben möge. Dabei werde angenommen, daß die Winkelhalbierende s des Eckenwinkels der Ecke in P von C zugleich auch den Eckenwinkel von $\mathfrak{C}$ in P halbiert. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von C, $z = \Phi(w)$ das von $\mathfrak{C}$ so auf $|z| < 1$ ab, daß ein im Innern von C und $\mathfrak{C}$ liegender Punkt $w = w_0$ in $z = 0$ übergeht. Dann gibt es:

a) *falls $\mathfrak{C}$ eine innere Vergleichskurve ist, zwei positive Konstanten K_1' und q_1 sowie zu jedem $w \neq w_1$ auf C mit $|w - w_1| \leqq q_1$ ein c auf der Winkelhalbierenden s, so daß*

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \geqq K_1' \frac{|\Phi(c) - \Phi(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}}$$

gilt, und

b) *falls $\mathfrak{C}$ eine äußere Vergleichskurve ist, zwei positive Konstanten K_2' und q_2 sowie zu jedem $w \neq w_1$ auf C mit $|w - w_1| \leqq q_2$ ein c' auf s, so daß*

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \leqq K_2' \frac{|\Phi(c') - \Phi(w_1)|}{|c' - w_1|^{1/\tau}}$$

ist [45]).

Dabei dürfen für K_1' und K_2' die Werte $\frac{1-\omega}{\varkappa^{1/\tau}}$ bzw. $(1+\omega)\varkappa^{1/\tau}$ gesetzt werden, wo $\varkappa = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ist und ω, $0 < \omega < 1$, beliebig klein gemacht werden kann, wenn nur q_1 bzw. q_2 hinreichend klein angenommen wird.

Der Beweis ergibt sich aus dem Satze 1 und dem Satze 2, wenn man beachtet, daß nach dem sogenannten Lindelöfschen Prinzip [46]) im Falle a) für c im Innern von $\mathfrak{C}$ $|\Phi(c)| \geqq |\varphi(c)|$ und also $1 - |\Phi(c)| \leqq 1 - |\varphi(c)|$, im Falle b) für c' im Innern von C $|\Phi(c')| \leqq |\varphi(c')|$ und daher $1 - |\Phi(c')| \geqq 1 - |\varphi(c')|$ ist, und wenn man in beiden Fällen die Quasikonformität [47]) der Abbildung in w_1 berücksichtigt. Denn danach ist sowohl

$$\lim_{w \to w_1} \frac{1 - |\varphi(w)|}{|\varphi(w_1) - \varphi(w)|} = 1 \quad \text{als auch} \quad \lim_{w \to w_1} \frac{1 - |\Phi(w)|}{|\Phi(w_1) - \Phi(w)|} = 1,$$

[45]) Man könnte an Stelle der Winkelhalbierenden s auch allgemeiner einen beliebigen in P mündenden Jordanbogen L wählen, der ganz innerhalb eines von zwei von P ausgehenden Strahlen gebildeten Winkelraumes bleibt, die ihrerseits mit an P anstoßenden Stücken im Innern von C und von $\mathfrak{C}$ verlaufen. Wir brauchen aber diesen Satz nicht in dieser Allgemeinheit und beweisen ihn daher nur in der obigen Fassung.

[46]) E. Lindelöf, Mémoire sur certaines inégalités de la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel, Acta societatis scientiarum Fennicae **35** (1908), Nr. 7, pp. 3 ff. Siehe auch L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie **2**, S. 117.

[47]) Vgl. die in der Fußnote [33]) zitierten Abhandlungen.

wenn w auf s angenommen ist. Man erhält somit beispielsweise im Falle a)

$$\frac{|\varphi(w_1)-\varphi(c)|}{|w_1-c|^{1/\tau}} \geqq \frac{1-|\varphi(c)|}{|w_1-c|^{1/\tau}} \geqq \frac{1-|\Phi(c)|}{|w_1-c|^{1/\tau}} \geqq \frac{\Phi(w_1)-\Phi(c)}{|w_1-c|^{1/\tau}} \quad (1-\omega')$$

und mithin nach Satz 1 (mit $\psi = 0$) bei vorgegebenem ω und passendem $q_1 > 0$ für alle $w \neq w_1$ auf C mit $|w-w_1| \leqq q_1$ und die ihnen zugeordneten c

$$\frac{|\varphi(w)-\varphi(w_1)|}{|w-w_1|^{1/\tau}} \geqq \frac{1-\omega}{\varkappa^{1/\tau}} \frac{|\Phi(w_1)-\Phi(c)|}{|w_1-c|^{1/\tau}}.$$

Bemerkung. Berücksichtigt man die am Schluß des Beweises von Satz 1 und Satz 2 gemachten Bemerkungen über den Quotienten $\left|\frac{w-w_1}{c-w_1}\right|$ bzw. $\left|\frac{w-w_1}{c'-w_1}\right|$, so sieht man, daß auch hier Analoges gilt: Ist ω, $0<\omega<1$, beliebig vorgegeben, und sind q_1 bzw. q_2 die zu $K_1' = \frac{1-\omega}{\varkappa^{1/\tau}}$ bzw. $K_2' = (1+\omega)\varkappa^{1/\tau}$ nach dem Satze 4 zugeordneten Zahlen, so gibt es zwei positive Konstanten μ_1 und μ_2, so daß

$$0 < \mu_1 \leqq \left|\frac{w-w_1}{c-w_1}\right| \leqq \mu_2, \qquad 0 < \mu_1 \leqq \left|\frac{w-w_1}{c'-w_1}\right| \leqq \mu_2$$

für alle w auf C mit $|w-w_1| \leqq q_1$ bzw. $|w-w_1| \leqq q_2$ gilt. Diese (beim Beweise der Sätze 1 und 2 angegebenen) Konstanten konvergieren aber gegen 0, wenn man $\omega \to 0$ konvergieren läßt.

42. Zusatz zum Satz 4. *Dieser Satz bleibt noch richtig, wenn der Punkt, den man bei der Abbildung des Innern von $\mathfrak{C}$ in den Nullpunkt übergehen läßt, nicht derselbe ist wie der, der bei der Abbildung des Innern von C in $z=0$ übergeht.*

Es sei beispielsweise $\mathfrak{C}$ eine innere Vergleichskurve. Bildet man dann vermittels $z = \varphi^*(w)$ das Innere von C so auf $|z|<1$ ab, daß $w = \mathfrak{w}_0$ ($\mathfrak{w}_0$ nicht notwendig im Innern von $\mathfrak{C}$) in $z=0$ übergeht, und vermittels $z = \varphi(w)$, daß $w = w_0$ (in C und $\mathfrak{C}$) in $z=0$ übergeführt wird, so hat man

$$\varphi^*(w) = \frac{\varphi(w)-\varphi(\mathfrak{w}_0)}{1-\varphi(w)\overline{\varphi(\mathfrak{w}_0)}} e^{i\gamma} \qquad (\gamma \text{ reell}).$$

Ist daher der Satz 4 auf $\varphi(w)$ mit der Konstanten K_1' anwendbar, so gilt er auch für $\varphi^*(w)$, wenn man K_1' durch $K_1'(1-\varepsilon)$ ersetzt, wo $0<\varepsilon<1$ ist und ε beliebig klein durch genügende Verkleinerung von q_1 gemacht werden kann. Denn es ist ja zunächst

$$\frac{|\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)|}{|w-w_1|^{1/\tau}} = \frac{|\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)|}{|\varphi(w)-\varphi(w_1)|} \cdot \frac{|\varphi(w)-\varphi(w_1)|}{|w-w_1|^{1/\tau}}$$

und analog

$$\frac{|\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)|}{|c-w_1|^{1/\tau}} = \left|\frac{\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(c)-\varphi(w_1)}\right| \frac{|\varphi(c)-\varphi(w_1)|}{|c-w_1|^{1/\tau}},$$

so daß

$$(6,1)\quad \frac{|\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)}{|w-w_1|^{1/\tau}} \geqq \left|\frac{\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(w)-\varphi(w_1)}\right| \cdot K_1' \frac{|\varphi(c)-\varphi(w_1)|}{|c-w_1|^{1/\tau}}$$
$$= \left|\frac{\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(w)-\varphi(w_1)}\right| \cdot \left|\frac{\varphi(c)-\varphi(w_1)}{\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)}\right| \cdot K_1' \frac{|\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)|}{|c-w_1|^{1/\tau}}$$

ist. Ferner gilt, $\varphi^*(w)=\zeta^*$, $\varphi(w)=\zeta$ gesetzt,

$$\lim_{w\to w_1} \frac{\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(w)-\varphi(w_1)} = \lim_{c\to w_1} \frac{\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(c)-\varphi(w_1)} = \left(\frac{d\zeta^*}{d\zeta}\right)_{\zeta=\varphi(w_1)}$$
$$= \frac{1-|\lambda|^2}{(1-\bar{\lambda}\varphi(w_1))^2} e^{i\gamma} \neq 0,\ \lambda=\varphi(w_0),$$

bei beliebiger Annäherung von w und c an w_1 auf C oder aus dem Innern von C. Daher konvergiert das Produkt in (6, 1)

$$\left|\frac{\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(w)-\varphi(w_1)}\right| \left|\frac{\varphi(c)-\varphi(w_1)}{\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)}\right| \to 1,$$

wenn $w\to w_1$ und $c\to w_1$ streben. Hieraus und aus (6, 1) entnimmt man die Richtigkeit der Behauptung im Falle a). Analoges gilt im Falle b).

43. Wir definieren noch die folgenden beiden Begriffsbildungen:

Definition. Wir sagen, die geschlossene Jordankurve C besitze in P $(w=w_1)$ eine *„konforme Ecke" der Öffnung* $\pi\tau$, $0<\tau\leqq 2$,[48]), wenn C in P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$ besitzt und wenn für die Abbildungsfunktion $z=\varphi(w)$ des Innern von C auf den Einheitskreis bei allseitiger Annäherung von w an w_1 die Relation gilt

$$0<K_1\leqq \frac{|\varphi(w)-\varphi(w_1)|}{|w-w_1|^{1/\tau}} \leqq K_2,$$

wo K_1, K_2 Konstanten sind, die natürlich von der Normierung von $\varphi(w)$ abhängen. Wir sagen weiter, C besitze in P eine *„generalisierte konforme Ecke" der Öffnung* $\pi\tau$, wenn C in P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$ besitzt und es eine innere und äußere Vergleichskurve $\mathfrak{C}_i$ und $\mathfrak{C}_a$ gibt, die beide in P eine konforme Ecke derselben Öffnung besitzen[48]).

Satz 5. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die Jordankurve C, die im Punkte P eine generalisierte konforme Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0<\tau\leqq 2$, besitzt, eine konforme Ecke derselben Öffnung in P hat, ist, daß die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von C in P der Bedingung $\Delta(\varepsilon)=O(\varepsilon)$ genügt.*

[48]) Vgl. die Fußnote [9]).

Daß diese Bedingung hinreichend ist, folgt aus dem Satze 4. Sie ist aber auch notwendig, und zwar auch dann, wenn das Bestehen einer generalisierten konformen Ecke nicht vorausgesetzt wird. Denn bildet $w = f(z)$ den Kreis $|z| < 1$ auf das Innere von C ab und ist $w_1 = f(e^{i\vartheta_1})$, so bestehen die Ungleichungen

$$0 < c_1 \leqq \frac{|f(e^{i\vartheta}) - f(e^{i\vartheta_1})|}{|\vartheta - \vartheta_1|^\tau} \leqq c_2 .$$

Dies bedeutet aber (vgl. die Bemerkung 2 in Nr. 17), daß $t = |\vartheta - \vartheta_1|^\tau \operatorname{sgn}(\vartheta - \vartheta_1)$ ein metrischer Parameter von C in bezug auf $w = w_1$ ist, und daher gilt notwendig $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

44. Als eine Anwendung des Satzes 4 beweisen wir noch den folgenden

Satz 6. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau < 2$, besitzt. Ferner sei C in P linear unbewallt, d. h. die Unbewalltheitsfunktion von C in P genüge der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von C auf $|z| < 1$ ab. Dann konvergiert für jedes feste $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \tau)$ gleichmäßig für gegen w_1 aus dem Innern von C oder auf C konvergierendes w*

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{\frac{1}{\tau - \varepsilon}}} \to \infty , \qquad \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{\frac{1}{\tau + \varepsilon}}} \to 0 .$$ [49])

Beweis. Da C in P Halbtangenten besitzt, kann man ein sich nicht überschneidendes Polygon mit endlich vielen Seiten konstruieren, das den Punkt P mit C gemeinsam hat, in P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau'$ besitzt, wo sich τ' um beliebig wenig von τ unterscheidet, und sonst entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb von C verläuft und in dem zuletzt genannten Falle C im Innern enthält. (Im ersten Falle muß $\tau' < \tau$, im zweiten $\tau' > \tau$ vorausgesetzt werden.)

Sei nun erstens $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \tau)$ und $\mathfrak{C}_\varepsilon$ ein solches „inneres Vergleichspolygon", das in P eine Ecke der Öffnung $\tau'\pi = \pi(\tau - \varepsilon)$ besitzt; wir dürfen annehmen, daß die Winkelhalbierende s des Eckenwinkels von C in P zugleich den Eckenwinkel von $\mathfrak{C}_\varepsilon$ in P halbiert. $z = \Phi(w)$ bilde das Innere von $\mathfrak{C}_\varepsilon$ auf $|z| < 1$ ab. Daher gibt es nach dem Satz 4 in § 6 (unter Berücksichtigung der im Anschluß an ihn gemachten Bemerkung und des Zusatzes zu diesem Satze) eine Konstante K_1 und zu jedem $w \neq w_1$ auf C mit hinreichend kleinem $w - w_1$ ein c auf s mit $0 < \mu_1 \leqq \frac{|w - w_1|}{|c - w_1|} \leqq \mu_2$, derart, daß

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \geqq K_1 \frac{|\Phi(w_1) - \Phi(c)|}{|w_1 - c|^{1/\tau}} \tag{6,2}$$

[49]) Unter der Annahme, daß C in der Umgebung von P stetige Tangente besitzt, ist die Behauptung dieses Satzes bereits in der in der Fußnote [8]) zitierten C. R.-Note von Herrn Lawrentieff hergeleitet worden.

gilt. Nun gilt bekanntlich für die Abbildungsfunktion $z = \Phi(w)$ eines Polygons in einer Ecke der Öffnung $\tau'\pi = \pi(\tau - \varepsilon)$ für alle c auf s

$$\frac{|\Phi(w_1) - \Phi(c)|}{|w_1 - c|^{\frac{1}{\tau-\varepsilon}}} \geqq \varkappa_1 > 0,$$

wo $\varkappa_1$ eine Konstante ist. Hieraus ergibt sich wegen (6, 2)

$$(6,3)\quad \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{\frac{1}{\tau}}} \geqq K_1 \cdot \frac{\Phi(c) - \Phi(w_1)}{|c - w_1|^{\frac{1}{\tau-\varepsilon}}} \cdot \frac{1}{|c - w_1|^{-\frac{\varepsilon}{\tau(\tau-\varepsilon)}}} \geqq K_1 \varkappa_1 |c - w_1|^{\frac{\varepsilon}{\tau(\tau-\varepsilon)}},$$

und indem man (6, 3) und die Relation $0 < \mu_1 \leqq \frac{w - w_1}{c - w_1} \leqq \mu_2$ beachtet, erhält man

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{\frac{1}{\tau}}} \geqq K_2.$$

Da dieses für jedes feste $\varepsilon > 0$ mit einer von ε abhängigen Konstanten $K_2 = K_2(\varepsilon)$ gilt, ergibt sich daraus leicht die erste Behauptung für alle w *auf* C. Für w im Innern von C folgt sie dann aus dem Hilfssatz 10.

46. Wir konstruieren nun zweitens für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon + \tau \leqq 2)$ ein „äußeres Vergleichspolygon" $\mathfrak{E}_\varepsilon$, das in P eine Ecke der Öffnung $\tau'\pi = \pi(\tau - \varepsilon)$ hat, und zwar so, daß sein Winkel bei P durch die Winkelhalbierende s des Eckenwinkels von C bei P halbiert wird. $\Phi(w)$ bilde das Innere von $\mathfrak{E}_\varepsilon$ auf $|z| < 1$ ab. Indem man nun beachtet, daß für jedes c' auf s

$$\frac{|\Phi(c') - \Phi(w_1)|}{|w_1 - c'|^{\frac{1}{\tau+\varepsilon}}} \leqq \varkappa_1',$$

wo $\varkappa_1'$ eine nur von ε und nicht von c' abhängige Konstante ist, und die zweite Hälfte des Satzes 4 analog wie eben die erste Hälfte dieses Satzes anwendet, erkennt man durch ganz analoge Schlüsse die Richtigkeit der zweiten Behauptung.

Zusammenfassung.

Es wird das Verhalten des Differenzenquotienten

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$$

der Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ eines von einer geschlossenen Jordankurve begrenzten Gebietes G auf das Innere des Einheitskreises $|z| = 1$ in einem Randpunkt w_1 untersucht, in dem die Kurve C eine Ecke der

Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, besitzt, und zwar bei „*allseitiger*" Annäherung des Punktes w an w_1.

Es wird vorausgesetzt, die Kurve C sei in der Parameterdarstellung $w = w(t)$ vermittels eines „*metrischen*" Parameters t dargestellt, d. h. es gilt, $w(0) = w_1$ gesetzt,

$$(\text{II}) \qquad 0 < c_1 \leqq \left| \frac{w(t) - w_1}{t} \right| = \left| \frac{w(t) - w(0)}{t} \right| \leqq C_1 \qquad (c_1,\ C_1 \text{ Konstanten}).$$

γ_+ und γ_- seien die beiden in w_1 zusammenstoßenden Kurvenzweige von C, welche in w_1 die Ecke bilden, t_+, t_- die Halbtangenten in w_1 an γ_+ bzw. γ_-. $\xi(t)$ bezeichne den Abstand des Punktes $w(t)$ auf γ_+ bzw. γ_- von der entsprechenden Halbtangente t_+ bzw. t_-. Dann gilt (Satz 7 und Satz 8):

a) *Ist* $\Xi(t)$ *eine „monotone" Majorante von* $\xi(t)$, *d. h. ist* $\xi(t) \leqq \Xi(t)$ *und* $\Xi(t)$ *monoton, und konvergiert ferner das Integral* $\int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{\Xi(t)}{t^2}\, dt$, $\varepsilon, \delta > 0$, *so bleibt der Differenzenquotient* (I) *absolut zwischen zwei positiven Schranken („konforme Ecke").*

b) *Gilt über* (II) *hinaus schärfer:* $\lim_{t \to 0} \left| \frac{w(t) - w(0)}{t} \right|$ *ist vorhanden und positiv, so folgt aus der Existenz des Integrals* $\int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{\Xi(t)}{t^2}\, dt$ *die Existenz des* $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ *bei allseitiger Annäherung von* w *an* w_1.

c) *Die Bedingung für* $\Xi(t)$ *ist, was die Größenordnung von* $\Xi(t)$ *anbetrifft, die schärfste.*

Hieraus ergeben sich weitere Folgerungen, deren wichtigste das folgende Resultat ist: *Ist* C *eine geschlossene Jordankurve, die längs eines Bogens* c *stetig sich drehende Tangente besitzt, wird ferner dieser Bogen durch die Gleichung* $w = w(s)$ (s *Bogenlänge*) *dargestellt, und konvergiert auf jedem inneren Teilbogen von* c *das Integral*

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{w'(s+\sigma) - w'(s)}{\sigma} \right| d\sigma$$

gleichmäßig, so hat die Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ *des Innern von* C *auf* $|z| < 1$ *auf dem* (*offenen*) *Bogen* c *eine stetige und von* 0 *verschiedene Ableitung.*

Eine andere Folgerung bezieht sich auf Kurven mit Ecken, die von zwei Kurvenbögen mit stetiger Tangente gebildet werden. Die Größen-

ordnung für die Änderung des Tangentenwinkels im Scheitelpunkte w_1 der Ecke wird durch Angabe eines allgemeinen monotonen „*Lipschitzschen Moduls*“ $\omega(\sigma)$ charakterisiert, und alle Kurven C mit Ecken, die durch diese allgemeine Lipschitzbedingung mit demselben $\omega(\sigma)$ charakterisiert werden können, werden zu einer Klasse $L(\omega(\sigma))$ vereinigt. *Notwendig und hinreichend, damit alle Kurven C der Klasse* $L(\omega(\sigma))$ *im betrachteten Punkte eine Ecke mit existierendem Grenzwert von* (I) *für* $w \to w_1$ *besitzen, ist die Konvergenz des Integrals* $\int_0^\delta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma$.

Curriculum vitae.

Ich, Stefan Emanuel Warschawski, wurde als Sohn des 1920 verstorbenen Arztes Dr. Salomon Warschawski und seiner Gattin Olga geb. Loewenstein in Lida (ehemals Rußland, Gouv. Wilna, jetzt Polen) am 8. 4. 1904 geboren. Bereits als Kind kam ich nach Deutschland, 1916 nach Königsberg i. Pr., wo auch meine Mutter seit 1918 lebt, und bin preußischer Staatsangehöriger. Nach anfänglichem Privatunterricht besuchte ich seit Ostern 1917 das Staatliche Hufengymnasium in Königsberg, das ich Ostern 1924 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Ich studierte an den Universitäten Königsberg i. Pr. (S.-S. 1924 bis S.-S. 1926), Göttingen (W.-S. 1926/27 bis S.-S. 1927) und Basel (W.-S. 1927/28 bis S.-S. 1930) und besuchte Vorlesungen und Übungen über Mathematik, Physik und Philosophie bei den folgenden Dozenten:

in Königsberg: R. Gans, H. Heimsoeth, Th. Kaluza, W. Kaufmann, K. Knopp, E. Kretschmann, K. Reidemeister, W. Rogosinski, R. Schmidt;

in Göttingen: P. Bernays, M. Born, R. Courant, J. Geiger, F. Grandjot, G. Herglotz, E. Landau, Misch, A. Ostrowski, B. v. d. Waerden;

in Basel: P. Buchner, A. Hagenbach, K. Joël, W. Matthies, A. Ostrowski O. Spieß, M. Wehrli, H. Zickendraht.

Allen meinen Lehrern bin ich zu größtem Danke verpflichtet, vor allem aber Herrn Prof. Ostrowski, auf dessen Anregung hin die vorliegende, Arbeit entstanden ist.